PREUNIVERSITARIO
MATEMÁTICA
DANNY PERICH C

POTENCIAS Y RAÍCES

POTENCIAS

Una **potencia** es un producto de factores iguales. Está formada por la **base** (el factor que se repite) y el **exponente** (veces que se repite el factor).

$$a^n = a \bullet a \bullet a \bullet \ldots$$

Signos de una potencia $(+)^{par} = +$ $(+)^{impar} = +$ $(-)^{par} = +$ $(-)^{impar} = -$

Multiplicación y división de potencias de igual base
Para multiplicar (dividir) potencias de igual base, se suman (restan) los exponentes y se conserva la base.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Potencias de exponente cero
Toda potencia de exponente cero es igual a 1, con excepción de 0^0, la cual no está definida.

$$a^0 = 1$$

Potencia de exponente negativo
Se invierte con el denominador, y el exponente cambia de signo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{b^n}{a^n}$$

Potencia elevada a potencia
Se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Multiplicación (División) de potencias de igual exponente
Se multiplican (dividen) las bases y se conserva el exponente.

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Ejercicios.

1. $4^{-2} + 2^{-3} - 2^{-4} =$

   A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D) -8 E) -6

2. Si $3^x + 3^{-x} = P$, entonces $9^x + 9^{-x}$ es igual a:

   A) P^2 B) $P^2 + 2$ C) $P^2 - 2$ D) $P^2 - 1$ E) 3P

NÚMEROS IRRACIONALES (Q*): Son aquellos números decimales infinitos **no** periódicos. Los números $\pi = 3{,}141592\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ son ejemplos de números irracionales.

RAÍCES: Potencias de exponente fraccionario.

Suma y resta de raíces. Solamente pueden sumarse (o restarse) dos o más raíces cuando son raíces semejantes; es decir, si son raíces con el mismo índice e igual cantidad subradical.
Por ejemplo $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$.

Multiplicación de raíces del mismo índice. Se multiplican las cantidades subradicales y se conserva el índice

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Ejercicio. $\sqrt[3]{a^{2x+2}} \cdot \sqrt[3]{a^{x+1}} =$

A) a^{3x+3} B) $\sqrt[6]{a^{3x+3}}$ C) a^{3x} D) a^{x+3} E) a^{x+1}

Multiplicación de raíces de distinto índice. Primero se reducen a índice común y luego se multiplican. Otra posibilidad, al resolver ejercicios, es transformar cada raíz en potencia y resolver de este modo.

Ejercicio. Si a, b, n y p son números reales positivos, entonces $\sqrt[m]{a^2} \cdot \sqrt[n]{a^3}$ es igual a

A) $\sqrt[mn]{a^{2n+3m}}$ B) $a^{\frac{mn}{5}}$ C) $\sqrt[mn]{a^5}$ D) $\sqrt[mn]{a^6}$ E) a^5

División de raíces del mismo índice. Se dividen las cantidades subradicales y se conserva el índice de la raíz.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejercicios.

1. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Si P y Q son números irracionales, entonces P · Q es un número irracional.
II) Si P y Q son números irracionales, entonces (P + Q) es un número irracional.
III) Si P es un número irracional y Q es un número entero positivo, entonces $\frac{P}{Q}$ es un número irracional.

A) Solo I B) Solo III C) Solo I y II D) I, II y III E) Ninguna de ellas.

2. Al simplificar la expresión $\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$ resulta:

A) $2\sqrt{3}$ B) $2+\sqrt{14}$ C) $2+\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{7}+\sqrt{2}$ E) 4

División de raíces de distinto índice. Primero se reducen a índice común y luego se dividen. Otra posibilidad, al resolver ejercicios, es transformar cada raíz en potencia y dividir de ese modo.

Raíz de una raíz. Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva la cantidad subradical.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Ejercicio. $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}} =$

A) $\sqrt[3]{4}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[6]{8}$ D) $\sqrt[6]{2}$ E) 1

Simplificación de una raíz. Al simplificar una raíz debe considerarse si n es par o impar.

Si n es par, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$
Si n es impar, $\sqrt[n]{x^n} = x$

Ejercicio. Si x es un número real mayor que 1, entonces $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2$ es igual a

A) 0 B) 2 C) 2x - $\sqrt{x^2-1}$ D) 2x - $2\sqrt{x^2-1}$ E) 2x

Racionalización. Consiste en eliminar las raíces que se encuentran en el denominador de una fracción. Esta se realiza, si el denominador es un monomio, amplificando la fracción irracional por este monomio, y se amplifica por su binomio conjugado en caso de que el denominador sea un binomio irracional.
En caso en que la raíz del denominador sea del tipo $\sqrt[n]{a^m}$, la fracción dada se amplifica por el irracional $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Ejercicio. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

A) $\sqrt{6}-2$ B) $\sqrt{3}-2$ C) $2-\sqrt{6}$ D) $2-\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$