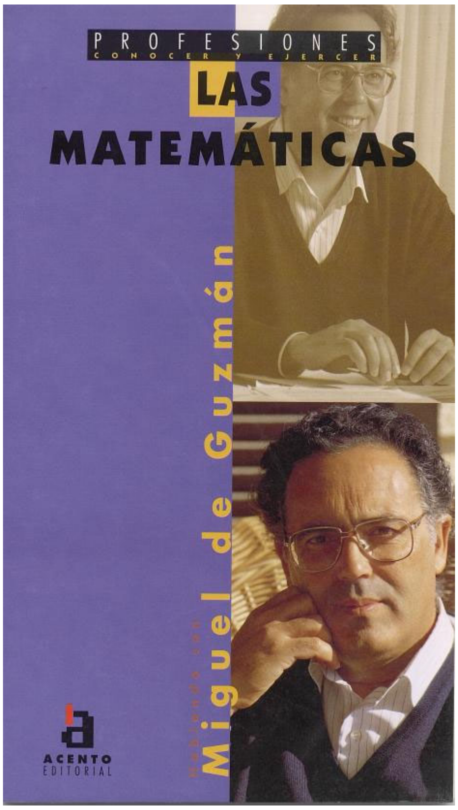
Profesión: Las Matemáticas



Miguel de Guzmán y Mariano Navarro

Índice

Prólogo

La dedicación a la matemática es una actividad apasionante. La matemática es, por supuesto, una ciencia, conocimiento sistemático y objetivo de ciertos aspectos de la realidad. Más aún, la matemática ha sido a lo largo de los siglos, y lo sigue siendo ahora con más fuerza, el modelo del pensamiento científico, sobrio, sereno, objetivo, fundamentado sobre principios bien sólidos, a partir de los cuales se desarrolla con brío. Pero la matemática es también una potente herramienta de exploración del universo que sirve a las otras ciencias y a la tecnología basada en ellas para hacerse con el dominio de los campos que ellas mismas escudriñan. Y junto a estas facetas, la matemática posee también, en modo muy importante para la cultura humana, la de ser un arte, creador de un tipo de belleza y armonía muy especiales, perceptibles por los ojos del espíritu.

La comunidad matemática, consecuentemente, es bien amplia, y en ella encuentran cobijo muchos tipos diversos de intereses. Hay quienes se ocupan de explorar a fondo las estructuras de los objetos matemáticos ya existentes para ampliar su alcance y de crear otros nuevos a fin de resolver los muchos enigmas viejos y recientes que la actividad matemática presenta. Otros se ocupan de establecer los enlaces adecuados con los científicos y técnicos de distintos campos, atendiendo a sus intereses y problemas específicos, a fin de adquirir juntos el señorío deseado de sus parcelas de trabajo. Hay también quienes aceptan el reto, bien estimulante e influyente, de encontrar los caminos más adecuados para la iniciación en la actividad matemática de los jóvenes que tratan de adentrarse en ella. En mayor o menor grado, todos los matemáticos vienen a compartir el interés y el entusiasmo por estas tareas esenciales para el desarrollo sano de la actividad matemática, y en su quehacer se encuentran unidos en la honda percepción común, hecha explícita ya en los pitagóricos de hace veintiséis siglos, de encontrarse cerca de «las raíces y fuentes de la naturaleza».

Por supuesto, como en toda marcha hacia un objetivo que valga la pena, el proceso de inmersión en la matemática no es un camino que carezca de dificultades para quien comienza. Unas provienen de nuestra actual carencia de métodos de iniciación con validez universal para allanar las sendas de modo uniforme a todos los que se acercan a ella. Es posible incluso que tales métodos no existan. Otros obstáculos provienen tal vez de las limitaciones e inercias de los sistemas y de las personas mismas encargadas de guiar el proceso de aprendizaje para hacerlo correctamente. Otros escollos, en fin, provienen de las dificultades intrínsecas que presenta la adquisición de algunos de los conceptos y métodos de la matemática. Estas dificultades se hacen bien patentes cuando uno examina las vueltas y revueltas que el pensamiento colectivo del hombre ha tenido que dar, a través del trabajo inmenso de los grandes genios de la historia de la matemática, hasta llegar a lograr las formas de introducción y manejo más asequibles de las que hoy disponemos. Es razonable pensar que las ideas cuya conquista costó al colectivo humano varios siglos de intensos esfuerzos por parte de muchas de sus mejores mentes presente resistencias nada desdeñables ante el intento de introducción efectiva en ellas de quienes comienzan su tarea matemática. Pero las satisfacciones y los logros que proporciona un cierto señorío de la matemática, y esto es válido para todos los niveles de iniciación, bien valen el esfuerzo.

La visión de la matemática que vas a encontrar en las páginas que siguen está teñida, con toda seguridad, con los colores de mi propia concepción personal, desde mi ángulo, con el enfoque parcial que proporciona el tipo de vivencias matemáticas que yo he tenido a lo largo de mi dedicación a esta ciencia. Otros matemáticos hablarían de otra manera, con toda seguridad. Vale la pena que lo tengas en cuenta. Nuestro interés (el de Mariano Navarro, quien se ha ocupado de describir nuestras horas de conversación, y el mío) ha sido el de proporcionar una visión de la matemática a través de una vida muy concreta. Ambos esperamos que aun esta visión particular pueda resultarte iluminadora en la búsqueda de tu propio camino. Y si entras en el camino de la matemática, ¡bienvenido!

Miguel de Guzmán

Introducción

«Las matemáticas, lo mismo que la teología y que todas las creaciones libres de la mente, obedecen a las leyes inexorables de lo imaginario».

Gian-Carlo Rota, 9 de agosto de 1980

No es muy habitual que en la primera página de un periódico se lea el titular que aparecía en la del diario *El País* del viernes 25 de junio de 1993:

$$x^n + y^n = z^n$$

Y no era para menos, ya que, como informaba el periódico, «los matemáticos llevaban más de 350 años intentando demostrar un teorema aparentemente simple enunciado por el francés Pierre de Fermat en 1637». Era, junto con la hipótesis de Riemann y la conjetura de Poincaré, el más famoso de los problemas aún sin solución matemática.

El anuncio de su resolución, el miércoles 23 de ese mismo mes, en Cambridge, por el matemático Andrew Wiles, británico de cuarenta años, profesor de la Universidad de Princeton, en Estados Unidos, «ha revolucionado el mundo de las matemáticas».

Ante la noticia, el profesor Miguel de Guzmán, catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid y presidente de la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI), no se mostraba tan eufórico, aunque sí agradablemente sorprendido. «En este caso me parece muy interesante lo que decía Gauss, que está considerado, con Arquímedes y Newton, como miembro de la trilogía más genial entre los genios que ha conocido la historia de la matemática, y que realizó trabajos fundamentales en la teoría de números: "En sí misma, la afirmación de Fermat no llama demasiado la atención; yo mismo sería capaz de establecer varias afirmaciones sobre la teoría de números de las que no tengo ni la más remota idea de cómo podrían ser dernostradas". Y está claro que si él se confesaba incapaz de intuir una solución, para los demás sería inalcanzable».

La afirmación de Fermat, por otra parte, no es un caso aislado en las matemáticas, sino que podríamos establecer otros muchos, de enunciado igualmente sencillo y, por lo que sabemos hoy, de solución igualmente compleja.

Uno de los más famosos es la denominada conjetura del 3x+ 1, que establece lo siguiente: Se toma un número natural cualquiera. Si es par, se divide por 2. Si es impar, se multiplica por 3 y se añade 1. Con lo que se obtiene se procede igual. Se observa que, haciendo experimentos, siempre vamos a dar en el ciclo 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... Al parecer, esto sucede con cualquier número natural. Nadie hasta el momento ha dado con una demostración de que así es.

Hay otros igualmente famosos, como la conjetura de Goldbach: ¿Es cierto que todo número par es suma de dos números primos? 0 el problema de los números primos hermanos: ¿Existen infinitos pares de números primos (P_1, P_2) tales que $P_2=P_1+2$?

«La importancia de estos problemas viene dada por el hecho de que son motivos para crear matemáticas muy profundas. Son retos que se proponen a la comunidad matemática, que la obligan a crear herramientas útiles para obtener su resolución. Herramientas que sirven, además, para tratar otros muchos problemas diferentes. Para llegar donde ha llegado Wiles ha sido necesario crear herramientas muy sofisticadas. El teorema de Fermat ya ha servido antes para crear, en el siglo pasado, por ejemplo, la teoría de ideales de Kurrimer, muy interesante en álgebra. Hoy día, muchos resultados muy sofisticados de geometría algebraica proceden de esos intentos de resolución».

La historia de esta noticia ilumina lo que es y puede ser la matemática, y el transcurso de los acontecimientos nos ayuda a entender lo que es y puede ser el matemático en el futuro. En frase de Alfred N. Whitehead, que gusta mucho de repetir Miguel de Guzmán: «Si la civilización continúa avanzando durante otros dos mil años, la novedad predominante en la cultura será el señorío del pensamiento matemático».

Fermat, un abogado aficionado a las matemáticas, considerado como uno de los grandes genios de la era moderna -Pascal decía que era «el primer hombre del mundo»-, anotó su teorema en los márgenes en blanco de las páginas de un libro de Diofanto de Alejandría, asegurando que había encontrado «una solución verdaderamente maravillosa, pero el espacio del que dispongo en este libro es demasiado exiguo para continuar escribiendo»... Nunca llegó a hacerlo y, desde entonces, el teorema se conoce como último teorema de Fermat: Existen números que son cuadrados perfectos y que además son suma de dos cuadrados perfectos. Así, $25 = 5^2 = 16 + 9 = 4^2 + 3^2$. Sin embargo, no existen cubos que sean suma de dos cubos (salvo haciendo intervenir el 0)».

Más general: «Para cualquier número natural n mayor que 2 no existe ninguna terna de números enteros positivos (x, y, z) diferentes de 0, tal que se verifique $x^n + y^n = z^n$

Para n = 2 existen muchas ternas (x, y, z), llamadas pitagóricas, tales que $x^2 + y^2 = z^2$, por ejemplo, (3, 4, 5), pero para n > 2 no existen números enteros positivos (x, y, z) tales que $x^n + y^n = z^n$.

La nómina de matemáticos que durante los siglos XVIII y XIX contribuyeron a encontrar soluciones parciales al teorema es enorme y, como ocurre con muchas intuiciones matemáticas de formulación sencilla, ésta ha abierto campos de trabajo importantísimos y fecundos o, en el intento de explicarla, ha deparado resultados con aplicaciones en campos tan aparentemente lejanos como la cristalografía o la computación.

Los ordenadores han permitido comprobar que el teorema se cumple incluso con números muy altos (potencias superiores incluso a los 4.000.000), pero esto no es una demostración matemática, sino simplemente una comprobación empírica.

Han sido también muchos los matemáticos aficionados que han creído encontrar la solución al también llamado «teorema magno», pero, como ocurre en los casos de alta complejidad, estos aficionados carecen de la especialización y del rigor demostrativo que se precisan para una demostración de este calibre.

Andrew Wiles se enteró del teorema a los diez años (1963) en un libro de una biblioteca pública del que ha olvidado el autor y el título, pero desde entonces, y hasta ese 23 de junio de 1993, ha vivido pendiente de él. Tan pendiente que estudió matemáticas para poder resolverlo.

«Pasé mucho tiempo de mi adolescencia intentando probar el teorema, pero cuando llegué a ser un matemático profesional descubrí que para resolverlo no bastaba el trabajo entusiasta de un quinceañero.

No pensé dejar de trabajar en el problema; mi mente estaba en él todo el tiempo. Una vez que estás realmente desesperado por encontrar la respuesta a algo, ya no puedes dejarlo».

Hace ahora diez años, supo de los avances de G. Frey y Kenneth A. Ribet (este último presente en la conferencia de Cambridge) en ese campo y, también, de sus vinculaciones con los trabajos iniciados en 1954 por el japonés Yutaka Taniyama, y los aplicó, en la soledad de un minúsculo despacho de su propia casa, a un progrарna basado en la teoría de las formas modulares, con influencia de la geometría hiperbólica de Poincaré, elaborado en términos del sofisticado lenguaje de la geometría algebraica.

Tan sofisticado que Nicholas Katz, su principal ayudante, cree que sólo el 0,1% de los matemáticos puede entender los más de 200 folios que demuestran, si no surge argumento en contrario, que la afirmación de Fermat es cierta.

Los expertos creen que Wiles llegó al QED (*Quod erat demonstrandum* «Lo que queríamos demostrar») hace tres años, pero que lo ha mantenido en secreto hasta comprobar minuciosamente y contrastar paso por paso el desarrollo de su demostración. Un secreto y un comedimiento que le llevaron a anunciar su conferencia bajo el título de *Curvas elípticas, formas modulares y representaciones de Galois.*

Respecto a las aplicaciones prácticas de los sucesivos argumentos de la solución y de las técnicas de su demostración, creen los expertos que son muy difíciles de predecir, pero que es seguro que las habrá y, además, serán muy importantes. «Mientras tanto», exclamaba Antonio Córdoba, catedrático también de Análisis Matemático de la Universidad Autónoma de Madrid, «no hay duda de que una cima de la cultura humana universal ha sido escalada».

El profesor Guzmán reconoce que, en su ya larga andadura profesional, está a mil leguas de haber obtenido un descubrimiento tan espectacular como el que hemos mencionado, «pero es que eso, en matemáticas, se produce cada cientos de años», y, sin embargo, sí que ha conocido momentos, y uno fundamental, en que supo que su predilección por las matemáticas le había deparado la satisfacción que quería y a las matemáticas mismas les había proporcionado una nueva arma con la que expandir sus conocimientos.

«El primer libro que yo escribí, por cierto muy a gusto, fue publicado en los años 70. Era el fruto de un curso de doctorado. Proporcionaba mis notas de trabajo y mis investigaciones a los estudiantes, les pedía sus correcciones, sus ideas propias, que fueron incorporadas al mismo. Así concluimos *Diferenciación de integrales en el espacio de n dimensiones,* publicado en inglés por una de las más prestigiosas editoriales alemanas en el campo científico. El libro fue traducido al ruso dos años después, e incorporado también a una colección importante.

Este trabajo abrió un nuevo camino en un campo del análisis incluido, a su vez, en un campo más amplio, que es el análisis de Fourier, también llamado análisis armónico. Éste estudió inicialmente la vibración de las cuerdas vibrantes, y es una de las herramientas importantes para otro campo matemático, que es el de las ecuaciones diferenciales, que provienen del estudio de la forma en que se comportan sistemas reales: el tiempo meteorológico, la expansión de los gases en la combustión... Tiene, incluso, aplicaciones en los modernos métodos no intrusivos de exploración médica.

Este es un éxito extrínseco; el éxito interior es la satisfacción, por ejemplo, de encontrar un teorema nuevo. Lo que me retrotrae a mi alegría a los trece años cuando era capaz de resolver un problema de los que aparecían en los libros de mis hermanos».

Al igual que en el caso de Wiles, los estudios del profesor Guzmán son de difícil determinación en cuanto a su utilidad práctica inmediata. «Aplicaciones prácticas directas, por así decirlo, de servicio material, creo que no, que no ha tenido ninguna, pero aplicaciones en el sentido de enriquecer técnicas de conocimiento en un campo que abarca en sí muchas aplicaciones inmediatas, sí. Ha enriquecido un campo que surgió precisamente como campo aplicado».

Y uno de los aspectos más importantes que un futuro matemático ha de tener en cuenta es esa peculiarisima convivencia entre matemática pura y matemática aplicada, sosteniéndose en el vacío de no saber siempre si su saber tiene utilidad pública independiente de la del enriquecimiento del propio quehacer matemático.

Un largo viaje

«Si no hubiese sido matemático», dice el profesor Guzmán, «quizá me hubiese gustado ser músico. La estructura en que se desarrolla la creación musical se empareja muy bien con el pensamiento matemático».

Pero tampoco, en principio, su destino parecía ser el de la práctica y la enseñanza de las matemáticas, ya que su biografía se inició con otro tipo de estudios y con una vocación religiosa que bien habría podido conducirle por muy distintos derroteros.

Nacido en Cartagena, en 1936, en una familia de marinos, sufrió de muy niño la que quizá pueda considerarse su pérdida afectiva más grave.

«A mi padre apenas lo conocí, pues murió cuando yo tenía seis meses, fusilado junto a sus 157 compañeros oficiales de la Armada que estaban en Cartagena. Mi padre debía de tener facilidad para los temas matemáticos, porque fue elegido entre los alumnos de la Academia para realizar un curso avanzado de radio en París y estuvo un año estudiando en la Sorbona con buenos resultados. Posteriormente organizó la Escuela de Radiotelegrafistas de la Armada».

Criado como hijo menor y último en una casa en la que se respiraba una atmósfera de interés científico, tomó de muy niño su prirner contacto con las matemáticas.

«Mis hermanos, uno cinco años y medio mayor que yo, y el otro cuatro, tuvieron una gran influencia sobre mí. Ambos estudiaron ingeniería: el mayor, ingeniero aeronáutico, y el segundo, ingeniero industrial. Desde muy pequeño, siendo todavía estudiante de bachillerato, tuve acceso a sus libros de estudio y compartí, por lejanamente que fuera, sus dificultades. Con trece o catorce años tenía conocimiento directo de la matemática que entonces estaba de moda para los ingresos en las escuelas de ingeniería en España. Eran libros en francés que esencialmente contenían problemas. Una matemática pasada, propia del siglo XIX ya entonces casi inoperante en Francia y en España, pero de un nivel elevado y de difícil comprensión. Debo agradecerle a aquellos libros, además, mi aprendizaje del francés, lengua que manejo hasta cierto punto».

Tiene el profesor Guzmán un carácter tan aparentemente tranquilo como tenaz. Por fecha de nacimiento inició los estudios a los cuatro años, de manera que a los nueve podía examinarse de ingreso. Vetada esa posibilidad por los responsables educativos, lo que hizo, sin que nadie pudiera legalmente impedírselo, fue aprobar el ingreso y el primer curso en un solo año. A los diez empezaba, por tanto, segundo curso de un bachillerato que requería siete.

No era, sin embargo, ni mucho menos, el típico empollón rechinante y molesto, pero desde los trece años empezó a estudiar matemáticas como un loco, pleno de entusiasmo y nada sorprendido o asustado: "Estudiaba muchísimo más allá de lo que en la clase se exigía". En otras asignaturas, sin embargo, sufría de continuos atragantos; así, por ejemplo, con la historia. Aunque afirma que, a los dieciséis años, cuando tuvo de verdad un buen profesor, esos problemas desaparecieron, y con ellos desaparecieron también las listas de nombres y las absurdas cronologías que hasta entonces le habían obligado a memorizar.

De entonces proviene su convencimiento de que importa tanto, si no más que el nivel de conocimientos del enseñante, su capacidad para tender un puente entre éstos y la comprensión del enseñado: «La física y la química eran asignaturas que me interesaban menos. Me incliné siempre por el análisis y la geometría».

Terminó el bachillerato el año 52, tenía dieciséis años. Empezó, sin embargo, y contra pronóstico, la carrera de ingeniero industrial.

«Mi decisión se debió a varias razones. La primera, a que en la España de entonces, producto de una mentalidad caduca y de una influencia, a qué dudarlo, francesa, si una carrera tenía prestigio era la ingeniería, y si las matemáticas se te daban bien, la carrera obligada era la ingeniería. Y también porque se pensaba que las matemáticas puras o las matemáticas tomadas en sí mismas no tenían otra salida que la enseñanza y ésta estaba mal pagada y peor acreditada. Por último, una razón práctica. Al terminar el bachillerato sufrí durante meses una enfermedad y, lógicamente, pensamos que lo mejor era estar con la familia (por tanto, en Bilbao), y la ingeniería más factible en Bilbao era la industrial, y en ella me matriculé. No fui nunca un ingeniero vocacional, sino, muy al contrario, fueron circunstancias puramente extrínsecas las que me llevaron por ese camino, que, de haberlo seguido sin otros horizontes, me hubiera llevado a ser un ingeniero teórico y no un ingeniero práctico.

La preparación para el ingreso en la escuela se hacía en academias privadas, una especie de gimnasios para fortalecer los músculos que permitirían superar los obstáculos que nos esperaban en la carrera. Yo la hice en la Academia Necochea. El entrenamiento, prolongado durante dos cursos sucesivos, consistía en resolver y resolver todo tipo de problemas que podrían aparecer en el temido examen. Las asignaturas principales, independientemente del odiado dibujo técnico, eran la física, las matemáticas y, creo recordar, la geología, o una asignatura parecida. Nos presentábamos aproximadamente unos 1.200 y aprobaban unos 60 o 70 como máximo. Ingresé en la escuela, pero no terminé la carrera».

No terminó ingeniería industrial, primera de las tres carreras que emprendería, por razones íntimas. De fe. Ingresó en la Compañía de Jesús.

«Hice el ingreso y decidí hacerme jesuita. Entré en el noviciado de Orduña. Cumplí dos años de estudios humanísticos y aprendí a leer a Homero en griego, a Virgilio y Horacio en latín. Luego estudié filosofía. Un año en Loyola, y luego otros dos en Munich, en el Berchmarnskolleg.

Creo que, aunque la experiencia de viajar en los años 50 fuera de España no resultaba fácil ni cómoda para ninguno de los viajeros, su impacto, tanto humana como culturalmente, era muy rico. Tenías, por primera vez, la posibilidad de enfrentarte a culturas diversas, casi diametralmente opuestas a la tuya.

Mi llegada a Munich fue especialmente dura, porque las secuelas de la guerra mundial eran todavía evidentes. Buena parte de la ciudad estaba en ruinas. Lo del milagro alemán aún no había despegado. Todavía comíamos mantequilla llegada de Estados Unidos y un famoso queso rojo procedente también de allí. Además, yo no tenía ni idea de alemán. Así es que me planté allí con 40 lecciones de Assimil y una dedicación de ocho horas diarias al aprendizaje única y exclusivamente de la que había de ser mi lengua.

He de decir, sin embargo, que aquello representó para mí un enriquecimiento incalculable. Primero, el conocimiento de la lengua en sí; después, una cultura humanística y filosófica de alto nivel, lo que me proporcionaba una sólida base para todo tipo de conocimientos. El idioma es expresión del talento de un pueblo y, al revés, el idioma facilita la expresión de un pueblo. Los alemanes han dado grandes filósofos porque la lengua en la que se expresan permite ese conocimiento y, al revés, los grandes filósofos alemanes han enriquecido la capacidad de expresión de su lengua propia».

Entre las capacidades que uno descubre paso a paso en Miguel de Guzmán se cuenta la que teológicamente se denomina «don de lenguas»: se maneja con alguna soltura en griego, latín, francés, inglés, alemán, italiano, portugués y, naturalmente, español.

«No estudié, sin embargo, teología, porque dejé la Compañía en el año 71, tras mi vuelta a España en el 69».

Los principios religiosos de las personas no precisan de explicación que responda a los principios de cualquiera otra y, por tanto, en lo que afecta a conocer de la andadura científica de quien declara su fe, la única interrogante justa es cómo se vinculan y cómo se encadenan fe y ciencia.

«Esa posible dicotomía nunca me planteó problemas. Tanto en Munich como después en Chicago, donde, como luego contaré, hice mi tesis doctoral, formaba parte de un grupo de jesuitas que convivían en el seno de sus respectivas facultades. Era una vida, como lo ha sido para los jesuitas, a lo largo de siglos de historia, muy sesgada hacia la cultura y la investigación. Del mismo modo que fueron los jesuitas los transmisores de la cultura occidental en países lejanos. Hay una tradición histórica entre los jesuitas de identificación de fe y ciencia.

Mi decisión de dejar la Compañía no ha representado jamás una ruptura desde el punto de vista religioso, y mantengo, además, extraordinarias relaciones con muchos de mis compañeros de entonces. Ocurrió únicamente que pensé, entre otras razones, que podía hacer mejor lo que quería hacer no siendo jesuita que siéndolo. La teología, en sí misma, no añadiría mucho a ese aspecto científico y matemático que me interesaba.

Cuando ingresé en la Universidad, los estudios resultaban agradables. Eran más fáciles que ahora. Eramos 60 en un curso, conocíamos perfectamente a los profesores y los profesores nos conocían a nosotros. El que se esforzaba y seguía paso a paso la carrera no tenía dificultades para terminarla. Ahora yo tengo 120 alumnos, a los que no conozco uno por uno ni puedo examinar personalmente.

Lo que más me sorprendió, llegando como llegaba de estudios de ingeniería y filosóficos, era el enorme énfasis que la matemática ponía en los aspectos puramente abstractos. A mí me parecía, y hoy me confirmo en esta apreciación, que no era la manera correcta de enfocarla ni de transmitirla. El ambiente de aquella época estaba dominado por el *bourbakismo* con el consiguiente destierro de todo aquello que hoy me interesa como matemático».

«Nicolás Bourbaki», escribía Miguel de Guzmán en uno de sus frecuentes artículos en prensa, «fue el seudónimo colectivo (si bien Bourbaki escribe siempre en singular) de un fuerte grupo de matemáticos, casi todos franceses, y algunos de ellos de excepcional valor, que se propusieron hacia los años 30 ir desarrollando todo el edificio de la matemática a partir de sus elementos fundamentales.

El intento de ofrecer unos fundamentos de la matemática para el matemático, como una especie de compilación básica, sistemática y ordenada de los conocimientos matemáticos del tiempo, fue una empresa extraordinariamente ambiciosa.

En el siglo III a. de C., Euclides pudo llevar a cabo con éxito una tarea semejante. Sus *Elementos* resultaron ser un texto de trabajo en que se educaron los matemáticos durante veintidós siglos. Pero tratar de hacer algo semejante en el siglo XX, con la aparición constante de nuevos campos y teorías motivadas por intereses siempre cambiantes y apoyadas en innovaciones tecnológicas profundas, hubiera podido parecer una misión imposible para cualquier humano.

El tratado de Bourbaki, *Ëlements de mathématique,* creció, a partir de 1939, en infinidad de tomos, tuvo un éxito que debió de sorprender al propio autor y su influencia se hizo notar más y más intensamente en líneas muy diversas de la actividad matemática. Pero su influjo no ha resultado en su conjunto muy positivo. El aspecto más pernicioso de su influencia ha sido el estilo *bourbakista* de abordar la matemática, que en los años 50 y 60 fue constituyendo una moda dictatorial en muchos ámbitos diferentes de la investigación y de la exposición matemática en los textos Y en la enseñanza.

La forma *bourbakista* de exposición, el formalismo que sólo se permite en sus procedimientos partir de axiomas bien explícitamente establecidos, sin apelar en ningún momento a los contenidos intuitivos y prácticos que dan su motivación a las construcciones matemáticas, era considerado el único modo admisible para la exposición matemática y, lo que ha sido especialmenté dañino, para la enseñanza misma a todos los niveles, incluida la enseñanza secundaria, y aun en muchos casos la primaria.

En los centros universitarios de numerosos países donde la actividad matemática era entonces fundamentalmente pasiva y receptiva, incluido el nuestro, buena parte de la enseñanza en aquellos años, e incluso posteriormente, tenía como base los tratados de Bourbaki y toda ella estaba embebida en la moda formalista que Bourbaki había impuesto. La enseñanza secundaria y primaria fue invadida por la corriente llamada "matemática rnoderna", con su proliferación de la teoría de conjuntos y con el destierro de la geometría de corte más clásico., sustituida por nociones bastante inoperantes y aburridas de álgebra abstracta. Esto hacía las cosas extraordinariamente difíciles para muchos alumnos

Hice la especialidad de matemática fundamental porque era la que realmente me atraía, y la de estadística porque pensé que me sería útil en el futuro. La de matemática didáctica me interesó también porque siempre me había atraído ese aspecto humanístico y comunicador factible en la matemática.

En mis primeros años de estudios, la razón profunda de mi preferencia por las matemáticas provenía de que me proporcionaban, por así decirlo, un saber más incontestable, un saber sólido, no opinable, sino saber- que lo manejas, que te proporciona dominio cierto sobre el mundo y sobre la naturaleza y que posee además un sentido de la belleza que te atrae. Es una estructura que puedes conternplar independientemente de su aplicación posible. Es agradable desde el punto de vista intelectual y posee coherencia y congruencia.

Cuando acabé la licenciatura, llegó a España un profesor argentino, llamado Alberto Calderón, que era y es uno de los principales "analistas" del mundo. Calderón es una de las personas que llegó a Chicago llevado de la mano de otro profesor, también analista y también de primera fila, un polaco huido de Polonia durante la Segunda Guerra Mundial. Entroncado en la escuela polaca, formó la suya propia en Chicago y en ella el binomio Calderón- Zygmund resolvió muchísimos problemas importantes en el campo de las ecuaciones diferenciales, en el campo del análisis armónico, que, como ya he dicho antes, es el primero en el que yo trabajé.

Ofreció que si había algún estudiante al que le pudiera interesar perfeccionar sus estudios en la Universidad de Chicago, podía hacerlo con él. Me lo propusieron y me fui.

Calderón fue mi director de tesis. Fue una experiencia increíble. Era ver la matemática de una forma completamente distinta. De un ambiente en el que se hacía matemática a través, generalmente, de libros de segunda mano, a gozar de la oportunidad de trabajar en un lugar donde la matemática era de primera, allí donde se estaban elaborando las teorías que sólo muchos años más tarde estudiaríamos nosotros en Madrid.

Cuando estaba haciendo la tesis me sentía, a veces, como escalando un muro impracticable, del que sólo muy poco a poco descubría las rendijas que podían ayudarme a ascender. Al principio, al ser un tema abierto, incluso los que podrían ayudarte ignoraban cómo hacerlo.

Ese tipo de acción es el auténtico quehacer matemático: resolver problemas abiertos durante largo tiempo y que tienen una proyección práctica mediata e inmediata para el futuro de las matemáticas.

Llegué a Estados Unidos en el año 65, cuando España empezaba a abrirse al mundo. Por el contrario, la Universidad de Chicago era un hervidero al que llegaban gentes de todo los países.

Las matemáticas estaban realmente "mimadas" entonces en Estados Unidos a causa de la carrera espacial. Pensaban los norteamericanos que había que desarrollar al máximo el conocimiento científico o, si no, los rusos les llevarían la delantera en su "guerra fría" durante muchos años. Los matemáticos eran buscados, y además había dinero en abundancia y se doctoraban muchos alumnos al año. Al tiempo que yo, se doctoraron en Estados Unidos unos 1.200 estudiantes, muchos de ellos no norteamericanos, pero cuya aportación a la cultura matemática de aquel país resultaba fundamental.

Terminados mis estudios en Chicago, ejercí durante un año como profesor en la Universidad Washington, de San Louls. Un año inmensamente productivo, en el que tomé contacto con muchos colegas activos en el campo del análisis.

Regresé a España, como he dicho, el año 69. Cuando empezaron los años "duros" en la Universidad, del 65 al 68, yo había estado fuera. Cuando volví, las facultades estaban ocupadas por la policía. Había bastante represión: dentro de las aulas, la policía secreta, y fuera, los grises. Mi actividad se limitó a apoyar en ocasiones a los estudiantes en la convocatoria de sus reuniones, etcétera».

Desde 1969 a 1982, Miguel de Guzmán fue agregado de cátedra de Ecuaciones Diferenciales o Análisis Matemático III. Ese último año fue nombrado catedrático de Análisis Matemático en la Universidad Autónoma de Madrid, donde permaneció dos años. En 1983 ingresó como miembro de número de la Academia de

Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Preside desde 1991, y hasta 1995, que es su mandato constitucional, la ICMI, Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas.

«Los matemáticos de todo el mundo se aglutinan en un organismo que es la Unión Matemática Internacional, que se ocupa de todos los asuntos relacionados con las matemáticas en el mundo y que tiene una comisión, la Comisión de Educación Matemática, en la que delega los asuntos relativos a la enseñanza. Agrupa a unos 70 países y su función principal es ocuparse de los problemas globales de educación. Su principal instrumento es el congreso de la Comisión, que se celebra cada cuatro años, y que tendrá su próxima sede, el año 1996, en Sevilla. Se espera la asistencia de unos 4.000 especialistas.

Las cuestiones fundamentales que centrarán los debates son:

1. Cómo integrar adecuadamente el ordenador en la enseñanza. Definir su papel.

2. Calibrar y analizar los nuevos procesos educativos para confirmar su bondad. Por ejemplo, en estos momentos lo que está más de moda es la enseñanza por medio de problemas; por el momento, parece que es lo más aconsejable, pero habrá que confirmarlo adecuadamente.

3. Resucitar, por así decirlo, la enseñanza de la geometría en la enseñanza activa.

4. Por último, un tema que hasta el momento no ha sido tratado todavía en profundidad y que me parece importantísimo: la importancia de la afectividad en la enseñanza matemática. Es decir, la disposición personal inicial del estudiante ante la matemática tiene una influencia extraordinaria en su comportamiento futuro frente a su aprendizaje de las matemáticas. Mucha gente inteligente queda bloqueada psicológicamente para su futuro por una mala introducción afectiva».

Este año 1993, la ICMI (Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas) ha puesto en práctica un programa de solidaridad matemática, de modo que los matemáticos «privilegiados» contribuyan a la educación y al desarrollo matemático de los países menos favorecidos.

«La idea es la de tratar de estimular un poco que la ayuda no sea únicamente una cuestión gubernamental, sino que se haga desde el compromiso personal. Hoy día es tan importante la numerización como la alfabetización de las poblaciones, porque el mundo futuro tiene un científico innegable».

Un señorío sobre la realidad

«La definición de las matemáticas», escriben P. J. Davis y R. Hersh, «es cambiante. Cada generación y cada matemático reflexivo de cada generación formulan una definición, según sus luces».

«Las matemáticas son la ciencia de la cantidad y el espacio. En su vertiente más sencilla se conocen como aritmética y geometría», dice una de las más simples.

«La matemática es la ciencia de la formación de conclusiones necesarias», decía, por ejemplo, C. S. Peirce, un matemático del siglo pasado.

«La matemática no es una mera colección de hechos y destrezas sin alma», afirma a su vez Miguel de Guzmán. «No se trata de verdades llovidas del cielo. Los hechos que la matemática utiliza nacieron al modo humano, arropados por el interés acuciante de hombres y mujeres intensamente enfrascados en resolver ciertas cuestiones que les intrigaban profundamente.

Hay en ella un paso continuo del caos, lo desconocido, a lo conocido, el cosmos. Cosmos es igual a orden. Caos, a desorden. El caos es ininteligibilidad. El cosmos es inteligibilidad, mediante un proceso de simibolización y razonamiento.

El quehacer matemático es una actividad polivalente, mucho más rica de lo que el común de las gentes cree, y que posee muchas vertientes. La primera y quizá principal, tal como se considera a sí la matemática misma consiste en ponerse ante una situación del mundo real que se quiere explorar para tratar de obtener, de "modo matemático", lo más que se pueda saber sobre la misma.

La matematización consiste en abordar la situación real para abstraer unos cuantos elementos que se puedan rigorizar de forma matemática, que se puedan manipular matemáticamente, que permitan construir un mundo aparte, que no tiene que ser la situación real. Se crea un mundo complejo que, desarrollado en sí mismo, matemáticamente, proporciona unas herramientas que permiten volver a la situación real y manipularla "realmente". Es un camino de ida y vuelta: se toma la realidad, se abstraen unos cuantos conceptos, unas cuantas reglas de formulación, unas cuantas reglas de manipulación, y se crea un mundo nuevo. El misterio de la aplicabilidad de la matemática consiste precisamente en la efectividad de ese extraño camino de ascensión, abstracción, creación guiada en parte por motivos estéticos, y descenso al mundo real para conseguir su dominio. En este camino transcurre la existencia del matemático aplicado».

La civilización tecnológica que conocemos y en la que se desarrolla nuestra existencia sería impensable sin las matemáticas. La actividad en la cual las matemáticas encuentran aplicaciones externas a sus intereses propios se denominan corrientemente matemática aplicada. Para cada tipo de aplicación hay una rama de las matemáticas más adecuada que otras. En biología, por ejemplo, la estadística.

Hoy día, lo que es característico de la matemática aplicada es tomar lo que se pueda de cada uno de los campos de estudio e investigación.

La matemática teórica se nutre muchas veces de lo que los matemáticos aplicados requieren.

«La ciencia cuantitativa, esto es, la ciencia con matemáticas, dicen P. J. Davis y R. Hersh, ha demostrado su eficacia para alterar y controlar la naturaleza. La mayor parte de la sociedad la apoya por esta razón

Es lo que Eugene Wigner describía como «la irrazonable efectividad de la matemática», y que ha llevado a Ian Stewart a postular que «quizá la matemática es efectiva porque representa el lenguaje subyacente del cerebro humano. [En cualquier caso] La realidad práctica es que constituye el método más efectivo y fiable de que disponemos para el entendimiento de nuestro alrededor».

Las matemáticas han estado, desde sus mismos orígenes, vinculadas a la filosofía, mostrándose, por así decirlo, interdependientes en sus respectivos intentos de explicarse el mundo real.

Para Pitágoras, ese entronque de la matemática con la filosofía era lo que permitía al entendimiento conocer las raíces y fuentes de la naturaleza. Y tuvo, además, una intuición extraordinaria al concebir el universo sustentado en la abstracción intelectual del número. «Grande, todopoderosa, todoperfeccionadora y divina es la fuerza del número, comienzo y regidor de la vida divina y humana, participante en todo. Sin el número, todo carece de fronteras y es confuso y oscuro», escribía su discípulo Filolao en el siglo V.

Platón, al que puede considerarse como el resonador de los pitagóricos, pues a través suyo es como se nos han transmitido muchas de sus ideas, extenderá esa noción del número como garante de la exactitud del pensamiento al segundo eje vertebral de la matemática, y así en el dintel de la puerta de la Academia podía leerse: «Nadie entre aquí que no sepa geometría».

Durante el Renacimiento, los estudios del *quadrivium* los integraban la aritmética, la música (ya los pitagóricos habían relacionado el número con la música), la astronomía y la geometría. Y así, Galileo pudo afirmar que: «En verdad, el libro de la filosofía es el de la naturaleza, el cual se encuentra perpetuamente abierto ante nuestros ojos, pero como está escrito en caracteres diferentes de los de nuestro alfabeto, no puede ser leído por todos. Los caracteres de este libro son triángulos, cuadrados, círculos, conos, esferas, pirámides y otras figuras matemáticas muy propias para una lectura de tal género».

Con la llamada edad de la razón, se aunarán todavía más pensamiento filosófico y lógica matemática. Para Descartes, la matemática constituye «un modo de habituar el espíritu a nutrirse con verdades y no contentarse con falsas razones». Kant cree que «en cada una de las disciplinas de la naturaleza solamente se puede encontrar tanto de auténtica ciencia cuanto se encuentra en ella de matemática». Y Leibniz llevará esta expresión a su extremo cuando escribe: «Llegará un momento en que dos filósofos se pongan a discutir y se digan: calculemos».

En nuestro propio siglo, Wittgenstein y Bertrand Russell ampliarán las relaciones entre lógica formal y matemática. Pero ¿qué busca realmente el filósofo en el matemático, y viceversa? «El matemático encuentra en su propio mundo», dice el profesor Guzmán, «un mundo más simple que el real porque lo ha construido él y, por tanto, lo conoce mejor. Lo que pretende es explorar el mundo real, pero hará bien en dirigirse a un modelo "simplificado".

Un modelo matemático es cualquier sistema completo y compatible de ecuaciones matemáticas, diseñadas para que se correspondan con alguna otra entidad, su prototipo. Tal prototipo puede ser una entidad física, biológica, social, psicológica o conceptual, tal vez incluso otro modelo matemático, según la definición de R. Aris.

De ahí que el filósofo acuda al mundo matemático como a un "modelo" del mundo real. Y, además, una utilización de un campo de razonamiento más libre de oscuridades, en el que los procesos de inferencia son más claros.

Por otra parte, el matemático se acerca al filósofo en cuanto que se ha de preguntar cómo son los procesos de pensamiento de las matemáticas y su problema más profundo: el infinito, que da lugar a la potencia de las matemáticas y al misterio de las matemáticas. De no ser por la presencia del infinito, la matemática no pasaría de ser una inmensa y superficial tautología. Pero el infinito está presente en el pensamiento matemático, constituyendo la raíz misma de su posibilidad. Por la presencia en la matemática del infinito es posible la formulación de la paradoja, que luego veremos, de Gödel.

Hay una afirmación que, junto a la confianza en el futuro desarrollo de la matemática, guarda un lugar especial en el entendimiento del profesor Guzmán: «Quienes mejor entienden a los matemáticos son los artistas».

Fue Henri Poincaré, un matemático francés del siglo XIX (1854-1912), quien mejor expresó los vínculos y argumentos de esa afinidad de sensibilidades: «Puede extrañar el ver apelar a la sensibilidad a propósito de demostraciones matemáticas que, parece, no pueden interesar más que a la inteligencia. Esto sería olvidar el sentimiento de belleza matemática, de la armonía de los números y las formas, de la elegancia geométrica. Todos los verdaderos matemáticos conocen este sentimiento estético real. Y, ciertamente, esto pertenece a la sensibilidad. Ahora bien, ¿,cuáles son los entes matemáticos a los que atribuimos estas características de belleza y elegancia y que son susceptibles de desarrollar en nosotros un sentimiento de emoción estética? Son aquellos cuyos elementos están dispuestos armoniosamente, de forma que la mente pueda sin esfuerzo abrazar todo el conjunto penetrando en sus detalles. Esta armonía es a la vez una satisfacción para nuestras necesidades estéticas y una ayuda para la mente, a la que sostiene y guía. Y, al mismo tiempo, al colocar ante nuestros ojos un conjunto bien ordenado, nos hace presentir una ley matemática... Así pues, es esta sensibilidad estética especial la que desempeña el papel de criba delicada. Esto permite comprender por qué quien no la posee no será nunca un verdadero creador. Más allá de la belleza sensible, coloreada y sonora, debida al centelleo de las apariencias, única que el bárbaro conoce, la ciencia nos revela una belleza superior, una belleza inteligible, únicamente accesible, diría Platón, a los ojos del alma", debida al orden armónico de las partes, a la correspondencia de las relaciones entre ellas, a la euritmia de las proporciones, a las formas y a los números. El trabajo del científico que descubre las analogías entre dos organismos, las semejanzas entre dos grupos de fenómenos cualitativamente diferentes, el isomorfismo de dos teorías matemáticas, es semejante al del artista».

Es éste un elemento configurador del pensamiento matemático en sus niveles más elevados. Las características de la belleza matemática parecen incluir cualidades tales la seriedad, la generalidad, la profundidad, la inevitabilidad, economía de pensamiento, la transparencia, la adecuación...

«San Alberto Magno», recuerda Miguel de Guzmán, «se refería a este sentimiento de la belleza como el hallazgo de "la unidad en la variedad". Al descubrimiento de un mundo variado pero con una unidad subyacente. Por ejemplo, la base original de la matemática, el número, ha sido progresivamente desarrollada en conceptos tan distintos como los números naturales, fraccionarios, enteros, primos, racionales, irracionales, etc. Son mundos diferentes, que pueden ser contemplados bajo un mismo prisma».

Otra posibilidad estética de las matemáticas es contemplar las que otros han hecho: «Lo importante en este caso es la captación conceptual sin esfuerzo, como que fuera connatural a ti. La revelación de una subterránea congruencia entre los conceptos y la economía de pensamiento y aparato para formularla. Con muy poco, resultados muy profundos. "Tal como los ángeles entienden las cosas". Según dice Santo Tomás: "Bello es aquello que resplandece luminoso en su propio ser, de modo que a quien lo mira le proporciona el sosiego y la facilidad de una percepción perfecta".

El placer estético de la matemática exige, sin duda, un grado de participación activa mucho más intenso que el que requieren la pintura o la música. En el mundo de las matemáticas, a fin de gozar del objeto bello que se presenta, es necesario crearlo o recrearlo, de tal modo que el goce estético aquí presente es comparable más bien con el de hacer música, cantar, danzar, pintar, fabular... Y digo fabular porque el matemático, como el narrador o fabulador, crean mundos "reales" en la medida que pertenecen tanto a la realidad tangible como a la realidad que ellos mismos crean.

Para mí mismo, el haberme percatado hace unos años de la posibilidad de llevar a cabo una elegante demostración del teorema de Brianchon, de tanta profundidad e importancia en la geometría proyectiva, constituyó un motivo de goce estético enormemente intenso.

Hay una fragmentación de las matemáticas. Yo no comprendo ni entiendo mucho de lo que hacen algunos de mis compañeros, y a ellos les ocurre lo mismo en relación con mi propio trabajo. Y, sin embargo, hay una especie de comunión, son los mismos métodos y los mismos fines con lenguajes diferentes porque se aplican a cosas diferentes».

Un cuadro de clasificación de las matemáticas posibles es el que reproducimos a continuación:

LA CLASIFICACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS, 1979

(Tomada de Mathematical Review)

General
Historia y biografía
Lógica y fundamentos Teoría de conjuntos
Combinatoria, teoría de grafos
Orden, retículos, estructuras algebraicas ordenadas
Sistemas matemáticos generales
Teoría de números
Teoría algebraica de números
Teoría de cuerpos y polinomios
Anillos y álgebras conimtativas geometría algebraica
Álgebra lineal v multilineal teoría de matrices
Anillos y álgebras asociativas
Anillos y álgebras no asociativas
Teoría de categorías, álgebra homológica
Teoría de grupos y generalizaciones.
Grupos topológicos. Grupos de Lie

Funciones de variables reales
Medida e integración
Funciones de una variable compleja
Teoría del potencial
Funciones de varias variables complejas y espacios analíticos
Funciones especiales
Ecuaciones diferenciales ordinarias
Ecuaciones en derivadas parciales
Ecuaciones en diferencias finitas y ecuaciones funcionales
Sucesiones. series y sumabilidad
Aproximaciones y desarrollos
Análisis de Fourier
Análisis armónico abstracto
Transformaciones integrales, cálculo operacional
Ecuaciones integrales
Análisis funcional
Teoría de operadores
Cálculo de variaciones y control óptimo
Geometría
Conjuntos convexos y desigualdades geométricas
Geometría diferencial
Topología general
Topología algebraica
Variedades y complejos celulares
Análisis global, análisis en variedades
Teoría de la probabilidad y procesos estocásticos
Estadística Análisis numérico Informática
Matemática general aplicada
Mecánica de partículas y de sistemas
Mecánica de sólidos
Mecánica de fluidos, acústica óptica, teoría electromagnética
Termodinámica clásica, transmisión del calor
Mecánica cuántica
Física estadística, estructura de la materia
Relatividad
Astronomía y astrofísica
Geofísica
Economía, investigación operativa, programación, juegos
Biología y ciencias del comportamiento
Sistemas, control
Información y comunicación, circuitos, autómatas

APROXIMADAMENTE 3400 SUBCATEGORÍAS

« Ya no son posibles los genios que dominaban con profundidad las líneas principales de las matemáticas.

Lo absolutamente exigible en el matemático, tanto hoy como lo ha sido siempre, es la precisión de pensamiento y también la capacidad de proponerse y tratar de resolver problemas que son importantes en su campo. Problemas que no determina uno mismo, sino el ambiente que rige ese campo. La comunidad matemática propone una serie de problemas que están abiertos, que no son artificiales ni de paja, sino naturales, que surgen del campo por sí mismos. Debe conocer a fondo sus herramientas y conocer a fondo lo que están haciendo sus colegas, no sea que termine descubriendo el Mediterráneo.

Hay, además, múltiples vertientes no sólo en la dedicación profesional específica, sino también en el propio modo de abocarse a las matemáticas.

«Existe el matemático que se dedica a esta abstracción por un motivo estético, lo que permite compararlo con el artista. Para ser un buen matemático hay que tener, como afirmaba Poincaré, una profunda intuición estética.

Hay igualmente una componente lúdica posible, que podrá extrañar a algunos, pero es un hecho profundo que una gran parte de la matemática más seria ha sido desarrollada bajo una motivación inicial lúdica y que los puzzles y juegos mentales comparten con la matemática muchos procesos de pensamiento eficaces en uno u otro campo. Es más, muchas veces resulta extraordinariamente difícil decidir dónde termina el juego y dónde comienza la actividad científica 'seria'. Para muchos de los matemáticos, la matemática nunca deja del todo de ser un gran juego.

Pero está también el matemático "comunicador", el que se dedica a su expansión y conocimiento en el mundo de las aulas».

Es una dedicación al estudio y una práctica que hace, opinan muchos, mejores a las personas. «En muchos aspectos creo que sí», coincide Miguel de Guzmán. "Las matemáticas transmiten un fuerte sentido de la realidad e imponen la modestia y la sobriedad de pensamiento. Efectivamente, sabes que no puedes engañar a nadie".

Pero no todo son ventajas o perfecciones, ni en la formación ni en el ejercicio y éxito de la profesión. «El conocimiento humano contiene muchas más riquezas de las que el pensamiento matemático puede abarcar. Existen realidades profundas que el hombre, más o menos conscientemente, ansía aprehender cognoscitivamente, que escapan a la matemática.

La matemática ha provocado en los matemáticos unos cuantos defectos importantes. Uno de ellos es, más en siglos pasados que hoy mismo, una cierta prepotencia, es decir, la creencia de que el matemático es el que se ocupa del pensamiento fuerte y el filósofo el que se ocupa de un pensamiento débil o de otros pensamientos menos rigurosos. Una prepotencia bien infundada.

Otro es la incapacidad o la intolerancia para la ambigüedad, consustancial al ser humano y perturbadora para el matemático.

En otras ocasiones, la vocación de simplificar lleva a los matemáticos a ser auténticos simplones, seres aniñados, caprichosos y simples en el peor sentido de la palabra.

Por último, el pensamiento único, que es equivalente casi a una sola idea. Seguir unos axiomas fijos inexistentes en la naturaleza, que no se rige por ellos, desde luego, sino que es mucho más rica. Mutilar la naturaleza es consustancial al pensamiento matemático, una necesidad que puede conducir a deformaciones de la realidad muy importantes

Como escribiera Ludwig Wingenstein en su célebre Tractatus Logico-Philosophicus: "Sentimos que incluso cuando todos los posibles problemas de las ciencias de la naturaleza hayan sido resueltos, nuestros problemas vitales no han sido tocados en absoluto. Por supuesto que entonces no queda ninguna pregunta ya; y precisamente ésta es la respuesta. La solución al problema de la vida se manifiesta con la desaparición de este problema. (¿No es éste el motivo por el que las personas a quienes el sentido de la vida, tras largas dudas, se les ha hecho claro, no pudieron decir en qué consistía este sentido?) Existe ciertamente lo inexpresable. Se muestra. Es lo místico".

Viene bien percatarse, concluye el profesor Guzmán, «de las limitaciones inherentes al pensamiento matemático a fin de contrarrestar las posibles aberraciones de una corriente hacia la exagerada matematización de nuestra cultura. La matemática es muy poderosa y muy útil en nuestro intento de obtener un cierto dominio de algunos aspectos de la naturaleza, pero conviene no olvidar que el ser humano es mucho más profundo que la más potente de las estructuras matemáticas que pueda imaginar».

Un árbol que crece con el tiempo

Hay un hecho diferencial entre las matemáticas y cualquiera otra de las ciencias puras, y es su carácter secuencial. Como dicen Philip J. Davis y Reuben Hersh, «las matemáticas forman un árbol que crece con el tiempo», y también, «todo cuanto alguna vez ha sido matemática, permanece siendo matemática».

«Lo que es cierto», apunta Miguel de Guzmán, «es que estamos muy cerca de los orígenes. Euclides se sentiría muy a gusto con nuestro modo moderno de razonar matemáticamente; sólo tendría que aprender la jerga. Esto no pasa, en general, entre los científicos. La matemática es un conocimiento acumulativo, nada se pierde en el vacío».

De ahí que la historia de las matemáticas no pueda limitarse al siglo XX.

Inicialmente fueron un conocimiento empírico. Las matemáticas de los babilonios o de los egipcios procedían de saberes empíricos: seguir el movimiento de los astros, medir las tierras, tallar las figuras. Esto sucede y se puede cuantificar. Se pueden predecir incluso los acontecimientos futuros: eclipses, fases de la luna, crecimientos estacionales de los ríos, etc.

La matemática occidental surgió entre los babilonios con fines prácticos bien concretos, económicos y astronómicos. Era una matemática mezclada ya con el conocimiento estético. Las figuras de los frisos babilonios antiguos contenían un gran sentido matemático.

Los griegos de los siglos VI al III a. de C. convierten ese conocimiento en una matemática razonada, paradigma de todas las ciencias, que procede a partir de premisas, axiomas y postulados y deduce por métodos de inferencia. Es la matemática cristalizada, lo que conocemos como matemática pura, que se convierte así en una ciencia deductiva, especulativa y contemplativa. Su epígono es Euclides, autor, como ya dijimos, de los primeros *Elementos* matemáticos.

La matemática aplicada se refugia sobre todo en la astronomía, y culmina en la obra de Ptolomeo, el Almagesto.

Decae con los romanos y su desarrollo se estanca a lo largo de la Edad Media.

Revive en el Renacimiento, con los algebristas y perspectivistas, por influencia de los matemáticos árabes, que, sin ser en sí grandes matemáticos, habían preservado el saber de los griegos.

Hay una estrecha relación entre el arte renacentista, imperio de la perspectiva, y la matemática. Durero era, en cierto sentido, un especialista en geometría proyectiva.

Es, también, el momento de los astrónomos científicos, Galileo y Kepler. El nacimiento de la ciencia moderna, que trata de deducir leyes y cuantificar los fenómenos terrestres.

Kepler debió de quedar fascinado al comprobar que la teoría de las cónicas, tan cultivada y perfeccionada desde los días de Apolonio de Pérgamo (siglo III a. de C.), se adaptaba plenamente a la explicación del movimiento planetario, viendo que elementos con significado en apariencia puramente matemático, como los focos de tales cónicas, adquirían una significación física tan importante: el Sol ocupa uno de los focos de cada una de las cónicas descritas por los planetas.

Como expresaba ardientemente E. P. Wigner: «El milagro de la adecuación del lenguaje de la matemática a la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos mostrarnos agradecidos por él y esperar que permanecerá siendo válido en la investigación futura y que se extenderá, para bien o para mal, para placer nuestro, aunque también para nuestra perplejidad, a ramas más amplias del saber».

El siglo XVII es el siglo de los genios: Newton, Leibniz, Pascal, Fermat, que dan las pautas de su desarrollo, especialmente en lo que se refiere al análisis matemático, creado por ellos, para dos siglos.

La matemática estudia la complejidad de determinadas estructuras, situaciones o fenómenos susceptibles de ser matematizados. Lo que ocurre es que esa complejidad es muy diferente a lo largo de los siglos, porque la matemática se va preparando mejor para afrontar estructuras o situaciones más complejas. En el principio aborda la complejidad de la multiplicidad y se da el número, la aritmética; la complejidad del espacio y de la forma, que en un principio se atacan estéticamente, da lugar a la geometría. A partir de los siglos XIV y XV aparece el desarrollo del álgebra, que trata la complejidad del número pero elabora sobre ella, es el símbolo del símbolo, se ocupa, por así decirlo, de todos los números al mismo tiempo. El álgebra se compenetra con la geometría analítica de Descartes, que aúna el símbolo del álgebra con la geometría. En el siglo XVII se aborda la complejidad del cambio, aparece el cálculo diferencial.

Durante los siglos XIX y XX se produce el desarrollo de la lógica matemática. De ahí la crisis de los fundamentos; es decir, la certeza inversa de que no hay una base sólida en la que sostener el gran edificio construido a lo largo de los siglos, por más que el árbol hunda sus raíces en tierra fértil.

Ya los griegos encontraron, en los principios de la matemática deductiva, paradojas que ponían en cuestión teorías aparentemente simples, como la de Zenón respecto al punto y la línea recta.

La paradoja de Russell, enunciada por el filósofo y matemático británico Bertrand Russell, nos permite, además, contemplar dos modos de la narración que responden a dos métodos distintos del razonamiento: el que podemos denominar discursivo y el matemático.

El primero, mediante el cuento del barbero: el rey de una nación dicta un bando por el cual el barbero de cada uno de los pueblos de su reino debe afeitar, bajo pena de muerte en caso de incumplimiento, a todos y sólo a aquellos vecinos del pueblo que no se afeiten a sí mismos.

¿Qué hace el barbero? Si se afeita a sí mismo, incumple la orden; si no se afeita, la incumple también.

El segundo, que es incluso más claro, según la teoría de conjuntos: hay conjuntos que son autopredicables y otros que son no autopredicables.

El conjunto de todas las cosas no verdes es una cosa no verde. Se puede autopredicar.

Consideramos ahora el conjunto de todas las cosas no autopredicables y nos preguntamos si es autopredicable o no autopredicable. Si es autopredicable, entonces será él mismo una cosa no autopredicable. Si es no autopredicable, resulta ser una cosa no autopredicable, y así es autopredicable.

B. Russell y Alfred N. Whitehead decidieron, a la vista del escollo descubierto, establecer unas reglas para la composición de conjuntos que permitieran una cimentación más segura, elaborada y perfecta de la teoría de conjuntos que se alejase de las antinomias.

Bertrand Russell llegó a decir que «la matemática es una ciencia en la que no sabemos de qué hablamos ni si lo que decimos es verdad o no». Esto es una verdad a medias, afirman, sin embargo, Davis y Hersh. Lo que así se describe no son las matemáticas, sino su andamiaje lógico.

El teorema de Gödel, enunciado en 1931 por Kurt Gödel, un matemático conocido fundamentalmente por sus «teoremas de incompletitud», rompió la posibilidad de que los matemáticos pudieran establecer sistema alguno indubitable: «En cualquier sistema matemático deductivo, existen siempre proposiciones que no son ni demostrables ni refutables dentro del sistema. Una de ellas es precisamente la afirmación de la consistencia del sistema: "Aquí no hay contradicciones"».

«Estamos elaborando las matemáticas», concluye Guzmán, «sobre una especie de acto de fe. Construidas sobre la experiencia de veintiséis siglos de historia, pero no podemos demostrar que en ellas no vayan a surgir contradicciones».

Un ordenador para entender el Caos

En las dos últimas décadas, una de las revoluciones más profundas experimentadas en el campo matemático no ha procedido de los matemáticos en si, sino de los avances tecnológicos del mundo informático.

«Lo que fue el microscopio para la evolución de las ciencias biológicas o el telescopio para la astronomía, es el ordenador respecto al desarrollo matemático: por su capacidad de acercar y ampliar las posibilidades de nuestro ojo. La irrupción del ordenador en el siglo XX como instrumento auxiliar del pensamiento humano está introduciendo una revolución mucho más drástica y profunda, no sólo por los cambios más o menos superficiales que en nuestra forma de vivir se están operando, sino sobre todo por las transformaciones que conlleva en lo que se refiere a lo más específico de nuestro ser humano: la capacidad de pensar. La superioridad para la observación del sistema hombre- sobre el hombre con sus ojosdesnudos es ciertamente notable, pero probablemente resultará insignificante comparándola con la superioridad para ciertos aspectos importantes de la actividad mental del sistema hombre-ordenador sobre el hombre desprovisto de este instrumento, sobre todo cuando con el avance de la tecnología se logre una interacción mucho más cómoda y fluida entre el hombre y su máquina. Cuando en un futuro próximo el médico, por ejemplo, o bien el economista, puedan incorporar a su dinamismo mental el sistema experto hábilmente programado de forma tan natural como ahora se calan sus gafas para tener una visión más nítida de los problemas con que se enfrentan, su capacidad para tomar una decisión acertada en la mayor parte de los casos será extraordinariamente superior a la actual.

De ahí el que hoy las matemáticas se apliquen con tanta intensidad al estudio de la inteligencia artificial, a fin de obtener un modelo del funcionamiento de la mente humana. Aunque estamos todavía en la fase de crear métodos para tratar esa estructura matemáticamente.

En el mundo de las matemáticas, el impacto profundo de la presencia del ordenador ya ha comenzado a hacerse notar en múltiples frentes. Desde hace más de un siglo, los matemáticos han estado luchando con un problema-juego aparentemente superficial: *el problema de los cuatro colores.* ¿Cuántos colores son suficientes para colorear cualquier mapa plano adecuadamente? *Adecuadamente* quiere decir que dos países con un trozo de frontera común deben recibir distinto color. Los esfuerzos de los matemáticos de unas cuantas generaciones habían resultado infructuosos. Se sabía que cinco colores bastaban y que tres no eran suficientes. En 1976, dos matemáticos de la Universidad de Illinois demostraron, mediante el uso inteligente del ordenador, que *cuatro colores bastan.* Hasta el momento no se conoce ninguna demostración que se pueda llevar a cabo por la mente humana sin el apoyo del ordenador. Para muchos esto representa un avance fundamental en el pensamiento matemático. Otros constatan, no sin cierta nostalgia, que este tipo de evidencia está muy lejos de ser tan satisfactorio como el de las matemáticas de siempre.

En los años 60 no se sabía cuál había de ser el impacto del ordenador en el quehacer matemático. Hoy sabemos de su importancia en el análisis de los fenómenos no lineales y en la denominada *teoría del caos,* a la que luego haremos referencia.

Su influencia ha sido decisiva en el estudio de «los fractales autosemejantes, la teoría de la iteración, los sistemas dinámicos, que basan sus consideraciones en la repetición, en principio infinita, de un cierto proceso bien determinado. El ordenador actual, con su versatilidad gráfica cada vez más perfeccionada, poder de resolución, ampliación, colores, etc., permite seguir este proceso iterativo hasta puntos del todo insospechados hace unas decenas de años, aunando así nuestros esfuerzos intelectuales con las posibilidades crecientes de nuestra intuición espacial y de nuestra sensibilidad estética. El ordenador se convierte así en un potente auxiliar que no sólo contrasta teorías, hipótesis y conjeturas, sino que proporciona también pistas muy valiosas que iluminan poderosamente el camino por recorrer.

Hay logros igualmente importantes en el estudio de los denominados fenómenos no lineales en la naturaleza; los lineales, estudiados por la física clásica, son aquellos en los que el efecto es proporcional a la causa (un muelle del que cuelga un kilo de peso se alarga una cierta medida; cargado con tres kilos, se estira tres veces más). Los no lineales son aquellos en los que causa y efecto no son proporcionales».

El profesor Guzmán se interesa actualmente por el estudio del caos.

«Una de las características que más me atraen de este tema es su universalidad. Un aspecto nuevo de las consideraciones actuales en torno al caos consiste en el descubrimiento, que comenzó a llegar a la luz hace unos veinticinco años, de que el comportamiento caótico está presente, de una manera peculiar, en una infinidad de procesos matemáticos que modelizan aspectos de la naturaleza que nos afectan muy de cerca, tales como el tiempo meteorológico, las turbulencias de la atmósfera y del mar, la propagación de epidemias, las pulsaciones de nuestro corazón, las ondas de nuestro encefalograma ... ».

«¿En qué sentido se puede pensar en el caos como el germen de una revolución científica?», se preguntaba Miguel de Guzmán en un artículo publicado hace cuatro años.

«Antes de la aparición del caos eran prevalentes entre los científicos ciertos paradigmas, ciertos esquemas conceptuales sobre los que la comunidad científica basaba su proceder normal, tales como los siguientes:

a) "Sistemas simples se comportan de modo sencillo": Un péndulo, un circuito eléctrico pequeño, una población de insectos aislada deberían poseer estructuras sencillas, transparentes, fácilmente predecibles.

b) "Comportamiento complejo de un sistema implica causas complejas": La evolución del tiempo meteorológico, el funcionamiento de un órgano biológico como el corazón, un fluido turbulento constituyen sistemas complicados, inestables, impredecibles. Tal comportamiento tendría que ser debido a multitud de causas diversas cuya confluencia no podemos dominar conceptualmente en su totalidad.

c) "Sistemas diferentes se comportan de modo diferente": La química de la neurona, la turbulencia que en el túnel de aire estudia el ingeniero aeronáutico son sistemas cuyas componentes elementales son distintas. Su comportamiento global no debería tener mucho en común.

Tras los últimos veinticinco años de estudio del caos, parece que se van imponiendo otras formas diametralmente opuestas que invalidan las anteriores:

a) "Sistemas conceptualmente simples pueden dar lugar a comportamientos complejos, caóticos, impredecibles". Un ejemplo puede ser el denominado efecto mariposa: un meteorólogo llamado Edward Lorenz tenía modelizado en el ordenador el tiempo meteorológico y trataba de estudiar una serie de ecuaciones diferenciales que modelizaban el tiempo y su evolución en días, semanas, etc. Dando unas condiciones iniciales, se ve la evolución del tiempo un día, dos días, etc. Lorenz, estudiando una de las gráficas, quiso hacer unas pequeñísimas modificaciones numéricas que le permitiesen simplificar el proceso. El resultado, pese a lo minúsculo del cambio, fue que la segunda gráfica obtenida, a medida que cubría un mayor espacio de tiempo, se distanciaba espectacularmente de la primera.

Lo enunció diciendo que del hecho de que una mariposa esté posada o volando en un punto de la selva del Amazonas, puede depender que haya o no un tornado dentro de un mes en el golfo de México. Lo que quiere decir que diferencias minúsculas en los valores iniciales de un fenómeno que se rige por ecuaciones no lineales pueden producir resultados diametralmente distintos.

b) "La complejidad de ciertos sistemas está producida a través del comportamiento sumamente simple de sus componentes": La complejidad de la naturaleza no se debe a la gran multiplicidad de causas diferentes y complicadas, sino a la gran multitud de componentes muy simples y a la iteración múltiple de los sencillos procesos a que están sometidos.

c) "Las leyes de la complejidad son en gran medida universales, uniformemente válidas para un gran número de sistemas diferentes": En sistemas muy diferentes puede suceder que, aunque los componentes elementales sean distintos, los procesos que los aglutinan estén regidos por las mismas leyes elementales. Hay una especie de isomorfia entre muchos sistemas naturales».

Una especie de Faro

El tópico más extendido señala a las matemáticas como uno de los huesos duros de roer tanto a lo largo de los estudios de bachillerato como, posteriormente, en las carreras técnicas. Sin embargo, son muy pocas las carreras universitarias en las que enseñanza e investigación aparezcan tan imbricadas.

Recientemente, Miguel de Guzmán analizaba las características del magisterio matemático en Estados Unidos y hacía sus carencias y dificultades extensibles al caso español.

«La práctica educacional actual ofrece a los estudiantes de matemáticas tan sólo una débil luz al final de un larguísimo túnel.

Los estudiantes retienen mejor las matemáticas que aprenden por procesos de construcción y experiencia internas.

Las prioridades en educación matemática deben cambiar a fin de reflejar el modo en que los ordenadores se utilizan en matemáticas.

Los futuros profesores deberían aprender matemáticas de un modo que estimule la participación activa con las ideas matemáticas.

La enseñanza de la matemática está experimentando una transformación desde el énfasis sobre el cálculo con lápiz y papel a un pleno uso de la calculadora y el ordenador.

La percepción social de la matemática está transformándose desde la consideración de esta disciplina como un cuerpo fijo de reglas arbitrarias a la de una activa ciencia de patrones y estructuras».

«En España», afirma, «el nivel educativo de la enseñanza matemática en primaria es bastante o muy bajo; en la enseñanza secundaria, sin embargo, es bueno, saludable. Depende de la preparación de los profesores. Los de primaria, que son muy influyentes en la futura apreciación de las matemáticas de las personas, no reciben una formación técnica adecuada y, al no sentirse seguros, traspasan por ósmosis esa inseguridad o ese odio propio a una asignatura que no comprenden. En la secundaria, al ser obligatorio que todos los profesores hayan pasado por la facultad, esa formación técnica está cuando menos asegurada. Sucede muchas veces que no se les proporcionan todas las herramientas pedagógicas, pero saben de lo que hablan, son técnicamente competentes.

Para transmitir matemáticas al nivel educativo no basta con saber matemáticas: hay que saber comunicarlas.

En la enseñanza universitaria, el nivel general de los profesores, en lo que respecta a cuestiones pedagógicas, es malo, incluso muy malo. En lo que nos parecemos al resto de los países, en los que también la generalidad del profesorado es, como profesorado, bastante malo. Saben incluso mucho de matemáticas, pero no son profesores excelentes ni se han ocupado de pensar cuáles son los métodos más adecuados para tender un puente hacia los alumnos.

Creo que hay muchos alumnos que llegan a la universidad con una concepción equivocada de lo que es el quehacer matemático. Una de las causas importantes es que raramente han sido expuestos a lo que es el verdadero razonamiento matemático. Muchos de ellos no saben siquiera lo que es una demostración; toman notas y notas, pero raramente saben cuándo una demostración está terminada. La enseñanza general se ha desprovisto de un elemento que es fundamental para cualquier estudio y vertebral para la matemática, que es el rigor de pensamiento.

El razonamiento matemático no es distinto del razonamiento normal, pero es un razonamiento depurado, por así decirlo; es decir, una vez que se aceptan ciertas convenciones del sistema, uno debe ser capaz de utilizarlas de forma precisa. Es necesaria una precisión del lenguaje de la que carecen los estudiantes.

Por ejemplo, ante la proposición: "Si llueve, me quedo en casa", cuando preguntas a los alumnos: "¿Si digo: 'Me quedo en casa', qué ocurre?", la respuesta inmediata suele ser: "Que llueve". Y, claro está que no. No dije lo que haría si no llovía.

Otro defecto que arrastran los alumnos es la carencia de intuición espacial. Que procede de otro de los errores de formación de la matemática moderna, en la que la geometría ha sido suprimida y con ella se suprimió aquello donde asienta el pensamiento espacial. Son incapaces de ver. Necesitan esa contrapartida imaginativa.

Las ideas y la intuición deben preceder siempre a la formalización lógica y rigurosa del pensamiento matemático.

Los teoremas se encuentran mucho antes de lo que se demuestran; como hemos visto en el caso del de Fermat, y en otros muchos que podríamos mencionar. Una vez encontrado, es cuando trabaja la lógica, pero la lógica no es creativa, sino meramente instrumental.

Muchos de estos defectos proceden de una errónea concepción del quehacer matemático al que hicimos referencia en el capítulo 2. La influencia del bourbakismo, de las matemáticas de vitrina.

Existen en las matemáticas tres estructuras básicas, que son el análisis, la geometría y el álgebra. Son las mismas consolidadas hace mucho tiempo y sobre las que giran todos los planes de estudios que se puedan diseñar.

Las estructuras fundamentales están muy entreveradas, y sin conocerlas profundamente es muy difícil un desarrollo posterior. La matemática no puede ser fragmentada porque no es fragmentaria, y mucho menos en los aspectos básicos.

Después depende de lo que quiera hacer uno con esa base inicial. En esta Universidad tenemos cinco especialidades distintas, que se estudian en los cursos tercero, cuarto y quinto.

El complemento esencial en la formación de un matemático es, a mi entender, un conocimiento profundo de la historia de la matemáticas. Porque, como ya he dicho, estamos muy cerca de los grandes matemáticos del pasado. Es el equivalente en filosofía a la historia de las ideas.

La visión histórica de la matemática es extraordinariamente útil incluso para aquel cuyo interés es exclusiva o predominantemente técnico, es decir, para aquel que dice interesarse prioritariamente por los problemas abiertos en su campo de trabajo. Cualquier objeto matemático suele nacer en estado de simplicidad. La complicación posterior que alcanzan muchas teorías oscurece frecuentemente las ideas iniciales y las hace opacas y poco penetrables a quien trata de obtener de ellas la visión unitaria e integradora que es preciso poseer para trabajar con eficacia en el campo. Acudir con interés a los orígenes del objeto propio de estudio proporciona una luz especial que ilumina muchos elementos que de otra forma no se interpretan correctamente.- En matemáticas, como en cualquier otra ciencia, tienen perfecta validez las palabras de James Clerk Maxwell: "Es de gran utilidad para cualquier estudiante de cualquier campo leer las ideas originales sobre tal materia, pues la ciencia se asimila más perfectamente cuando está en estado naciente".

En el terreno de la investigación, nuestro país está consiguiendo un estatus más que aceptable. Hoy día es impresionante la cantidad de nombres españoles que figuran en las revistas internacionales de mayor prestigio, y hay una densidad matemática fuerte. Se publica bastante, se trabaja en equipo y en conexión con equipos externos. Han aumentado muchísimo las capacidades técnicas y las posibilidades de asistencia a congresos, etc., lo que ha cambiado radicalmente la situación respecto a la existente hace quince o veinte años.

Hoy día, la rama que buscan muchos de los estudiantes (70%) es la rama informática, las ciencias de la computación. Otras posibles son:

- Matemática fundamental.

- Matemática aplicada.

- Estadística e investigación operativa.

- Orientación didáctica.

- Astronomía y geodesia.

Más importantes que los planes de estudio son los profesores».

Hay ahí precisamente una diferenciación clara entre la vocación didáctica del profesor Guzmán y lo que cabría pensar que fueran los intereses de un matemático de alto nivel, pues prefiere encargarse de los cursos de iniciación, en lugar de dedicarse a los cursos de análisis, más cómodos, de los últimos años.

«Lo fundamental es introducir a los alumnos en el taller del matemático. Lo que importa es mostrar la forma adecuada de resolver sus problemas. No es un aprendizaje lógico o memorístico, sino un aprendizaje práctico: aquí está un problema y aquí están las formas en que los grandes matemáticos han sido capaces de resolverlo, y éstas son las herramientas que crearon para llegar a sus soluciones. La exposición a ese tipo de actividad es lo más importante que podemos proporcionarles. Hacerles hacer matemáticas.

Mi taller, al menos en lo que respecta al trato con los alumnos, es un taller de herramientas y técnicas de pensamiento. Creo que es importante porque ese manejo es lo que les va a servir a lo largo de toda su vida como matemáticos. Adquirir herramientas de pensamiento que les faciliten la comprensión y la creación de sus matemáticas Es un taller de introspección.

Las tesis que he dirigido en los últimos años se ocupan de temas relacionados con los fractales. A los que llegué, precisamente, por mi trabajo en el análisis de Fourier, uno de cuyos aspectos es la teoría de la diferenciación de integrales, teoría que tiene muchos aspectos que conjugan análisis con geometría. Había un campo creado en los años 20 por un matemático ruso llamado Besicovitch: teoría geométrica de la medida. Pensé que mi formación me permitía resolver problemas dentro de ella. Me introduje en ella con unos cuantos estudiantes y hemos realizado varias tesis doctorales buenas o muy buenas.

En matemáticas, las tesis son siempre trabajos de investigación. No se admiten aquellas que no tienen aspectos innovadores. Mi trabajo es "investigar" con los alumnos. Con un grupo de alumnos, tres o cuatro, leemos unos cuantos artículos de vanguardia, tratamos de detectar problemas que están abiertos, candentes, que la gente se ocupa de ellos y los considera importantes, pero nadie sabe la solución. Se trata de acumular técnicas con las que atacarlos. No son siempre, como fácilmente se entiende, del tipo del último teorema de Fermat, sino son complementos que se considera que ayudarían a redondear una teoría para entenderla mejor. Otras veces, con suerte, una técnica que no es propia de un campo, sino de un campo vecino en el que uno de nosotros está introducido, se considera que quizá pudiera ser útil para la comprensión y profundización del primero y se muestra capaz de resolver muchos de sus problemas. Mi libro sobre diferenciación de integrales, en concreto, fue el resultado de un proceso de este tipo. Yo venía del campo de análisis de Fourier, que poco tiene que ver, por así decirlo, con la diferenciación de integrales, pero es un campo que tiene herramientas muy potentes. Encontré una colección de problemas muy interesantes de un profesor de una universidad de California y caí en la cuenta de que muchas de las cosas que proponía, yo podía resolverlas eficazmente, de forma relativamente sencilla. Con esa panoplia de instrumentos, empecé a ocuparme de un tema en el que habían trabajado otros especialistas con herramientas procedentes de otros campos, pero no tan viables o útiles como las mías. Aglutinar campos distintos permite aproximar modos de pensar distintos y, de este modo, unos sirven para otros.

Hay otros matemáticos que de la nada son capaces de obtener teorías y herramientas revolucionarias que crean estilos matemáticos propios, pero no todos tenemos esa inmensa capacidad, del mismo modo que en música no todos los compositores son Mozart».

En lo que muchos de los educadores están de acuerdo es en que existe, y puede describirse y enunciarse, una técnica válida del descubrimiento matemático, extensible, además, a otros campos del pensamiento.

George Polya, matemático y maestro de maestros, «cree», escriben David y Hersh, «que la capacidad para descubrir y la capacidad de invención pueden ser reforzadas mediante una enseñanza hábil, que ponga al estudiante sobre aviso de los principios en que se funda el descubrimiento y que le dé oportunidad de practicar y dominar estos principios.

Para resolver un problema:

Primero: hay que *comprender* el problema.

Segundo: averigüe qué conexiones hay entre los datos y las incógnitas. De no ser posible hallar conexiones inmediatas, puede ser necesario examinar problemas auxiliares. Al final, debería obtenerse un plan de resolución.

Tercero: *lleve* a *efecto* su plan.

Cuarto: *examine la* solución obtenida».

Sus técnicas heurísticas están reflejadas en el siguiente cuadro:

TÉCNICAS HEURÍSTICAS DE USO FRECUENTE

Esquema tomado de A. H. Schoenfeld

Análisis

1) TRAZAR UN DIAGRAMA, si es posible.

2) EXAMINAR CASOS PARTICULARES:

a) Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema y «adquirir mano».
b) Examinar casos límites, para explorar la gama de posibilidades.
c) Asignar a los parámetros enteros que puedan figurar la secuencia de valores 0, 1, 2, ... y buscar una pauta inductiva.

3) PROBAR A SIMPLIFICAR EL PROBLEMA:

a) sacando partido de posibles simetrías, o
b) mediante razonamientos «sin pérdida de generalidad» (incluidos los cambios de escala).

Exploración

1) EXAMINAR PROBLEMAS ESENCIALMENTE EQUIVALENTES:

a) Por sustitución de las condiciones por otras equivalentes.
b) Por recombinación de los elementos del problema de distintos modos.
c) Introduciendo elementos auxiliares.
d) Replanteando el problema mediante:

1) cambio de perspectiva o notación,
2) considerando el razonamiento por contradicción o el contrarrecíproco,
3) suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.

2) EXAMINAR PROBLEMAS LIGERAMENTE MODIFICADOS:

a) Elegir subobjetivos (satisfacción parcial de tas condiciones).
b) Relajar una condición y tratar de volver a imponerla.
c) Descomponer el problema en casos y estudiar caso por caso.

3) EXAMINAR PROBLEMAS AMPLIAMENTE MODIFICADOS:

a) Construir problemas análogos con menos variables.

b) Mantener fijas todas las variables menos una, para determinar qué efecto tiene esa variable.
c) Tratar de sacar partido de problemas afines que tengan parecidos
:
1) forma,
2) datos,
3) conclusiones.

Recuerde: al manejar problemas afines más fáciles, se debería sacar partido tanto del RESULTADO como del MÉTODO DE RESOLUCIÓN.

Comprobación de la solución obtenida

1) ¿VERIFICA LA SOLUCIÓN OBTENIDA LOS CRITERIOS ESPECIFICOS SIGUIENTES?

a) ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
b) Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
c) ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?

2) ¿VERIFICA LOS CRITERIOS GENERALES SIGUIENTES?

a) ¿Es posible obtener la misma solución con otro método?
b) ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
c) ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
d) ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

El profesor Guzmán, por su parte, ha extendido éstas en su libro titulado *Para pensar mejor.*

«La virtud fundamental en un maestro o profesor es, en mi opinión, su capacidad para estimular a los alumnos para que sean los creadores de su propio pensamiento, que aprendan a enfrentarse a los problemas con cierta autonomía. Y lo que más me gustaría que abundara en el alumnado es el espíritu inquisitivo: que no se contentaran con las explicaciones que se les ofrecen, sino que fueran más allá que el propio profesor.

Sin vocación matemática podría terminarse la carrera. Supongo que muy a disgusto y con bastantes dificultades, pero no hace falta ser una lumbrera para realizar estos estudios, lo que hace falta es trabajo continuo. Pero no quedaría satisfecho ni pasaría por los estudios con facilidad».

Las diferencias que entre la enseñanza recibida y la práctica de su profesión habrá de encontrar el estudiante «dependen mucho de la ocupación que uno tenga como matemático. En la actualidad hay muy distintas salidas para los matemáticos.

Las más claras e inmediatas son para los informáticos, aquellos que se dedican a las ciencias de la computación. Empresas como Hewlett Packard, IBM, etcétera, precisan de matemáticos para muchas tareas diferentes. Por ejemplo, muchas empresas pequeñas solicitan los servicios de una empresa grande, como es Arthur Andersen, y ésta encarga a sus matemáticos la resolución de los problemas planteados, que pueden ser puramente informáticos, de cálculo de mercado, etcétera.

Otra salida igualmente inmediata es para aquellos que han estudiado la especialidad de didáctica y metodología, que se dedicarán, lógicamente a la enseñanza matemática en la enseñanza secundaria. Tienen que hacer un curso adicional de capacitación pedagógica, que suele durar unos meses, en cursos que ofrece el Instituto de Ciencias de la Educación (ICE). Hasta ahora era muy difícil para los institutos encontrar matemáticos, ya que la gran mayoría de éstos prefería dedicarse a la industria y otras ramas profesionales, por lo que esas plazas eran ocupadas por biólogos, médicos etc. Actualmente la situación ha variado radicalmente.

Hasta el momento no hay muchos matemáticos aplicados propiamente dichos, porque es una especialidad relativamente reciente. Su oficio es, en colaboración con otros científicos, resolver los problemas planteados por la industria.

Otras profesiones posibles son las de astrónomo o geodesta, que se emplean en los observatorios astroilómicos y en los servicios nacionales correspondientes de cartografía. Hay proyectos cartográficos internacionales en los que están implicados matemáticos españoles.

Los estadísticos y los especialistas en investigación operativa tienen un papel destacado en empresas para el estudio de mercados, teoría de colas, de espera, planificación de viajes -en los que se mantiene vivo el problema del viajante y la imposibilidad de resolver por ordenador cuál sería el trazado óptimo en España., por ejemplo-, obsolescencia o duración de los productos, etc. Grandes superficies, hospitales, etc., son sus posibles empleadores.

Por último, aquellos que se interesan por la especialidad de matemática fundamental, análisis, topología, álgebra, etc., tienen como salida la carrera académica propiamente dicha o la enseñanza, tanto universitaria como en enseñanza secundaria. Actualmente, la proporción de doctores en esta especialidad es relativamente corta.

En general, puede decirse que el tipo de problemas que se le presentan al licenciado en la práctica, caso de haber tenido una buena formación, no supone grandes dificultades. No hay solución de continuidad entre los estudios y sus posibles aplicaciones. Hay una cierta semejanza entre lo que el matemático estudia y lo que el matemático hace después».