TODO LO QUE SIEMPRE QUISISTE SABER SOBRE π

D. Julián Aguirre (*)

3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944
592307816406286208998628034825342117067982148086 5i3282306647
0938446095505822317253594081284811174502841027019385211055 59
644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165
271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273
724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360
011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953
092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724
891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737
190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132
000568127145263560827785771342757789609173637178721468440901
224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960
864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951
059731732816096318595024459455346908302642522308253344685035
261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303
598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532
171226806613001927876611195909216420198938095257201065485863
278865936153381827968230301952035301852968995773622599413891
249721775283479131515574857242454150695950829533116861727855
889075098381754637464939319255060400927701671139009848824012
858361603563707660104710181942955596198946767837449448255379
774726847104047534646208046684259069491293313677028989152104
752162056966024058038150193511253382430035587640247496473263
914199272604269922796782354781636009341721641219924586315030
286182974555706749838505494588586926995690927210797509302955
321165344987202755960236480665499119881834797753566369807426
542527862551818417574672890977772793800081647060016145249192
173217214772350141441973568548161361157352552133475741849468
438523323907394143334547762416862518983569485562099219222184
272550254256887671790494601653466804988627232791786085784383
827967976681454100953883786360950680064225125205117392984896
084128488626945604241965285022210661186306744278622039194945
047123713786960956364371917287467764657573962413890865832645
995813390478027590099465764078951269468398352595709825822620
522489407726719478268482601476990902640136394437455305068203
496252451749399651431429809190659250937221696461515709858387
410597885959772975498930l617539284681382686838689427741559 91
855925245953959431049972524680845987273644695848653836736222
...

(*) Profesor de la UPV. Departamento de Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Una mirada superficial a la historia del pensamiento humano revela que determinados asuntos han merecido la atención de los pensadores, filósofos e intelectuales desde el nacimiento de la humanidad hasta nuestros días. En general se trata de cuestiones que no han recibido una respuesta satisfactoria a gusto de todos. Sirvan como ejemplo las preguntas ¿quienes somos?, ¿de dónde venimos? y ¿a dónde vamos? Si esta realidad es descorazonadora, podemos consolarnos volviendo nuestra mirada hacia otros problemas que, si bien de naturaleza distinta, han ocupado mentes sapientísimas durante siglos y han sido completamente resueltos.

Uno de esos problemas es el de la cuadratura del círculo. Consiste en construir un cuadrado con un area igual a la de un círculo dado. Junto con la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, es uno de los tres problemas clásicos planteados por los matemáticos de la Grecia antigua. Es importante comprender que el término construir debe entenderse en el sentido de construir usando exclusivamente regla y compás. Aunque hoy nos pueda parecer un poco extraña esa insistencia en el uso exclusivo de la regla y del compás, debe tenerse en cuenta que para los griegos los números eran razones entre magnitudes que se representaban mediante segmentos, áreas o volúmenes. La historia de la cuadratura del círculo como problema científico se extiende en su totalidad ante nosotros. Podemos rastrear sus orígenes en la antiguedad y seguir el desarrollo de los métodos e ideas para resolverlo hasta llegar por fín a su completa solución. Podemos ver también como el progreso hacia la solución se ha visto afectado por la labor de algunos de los más grandes matemáticos que ha dado la humanidad, como Arquímedes, Huyghens, Euler y Hermite entre otros.

No solo los científicos muestran interés por estas cuestiones. La Poetisa Wislawa Szymborska, Premio Nobel de literatura de 1996, escribió un poema titulado *El número π*, que puede leerse el diario El País del 4 de octubre de 1996 [1].

1. DEFINICIÓN DE π

El número π se define como la razón de la longitud de la circunferencia al diámetro.

Esta definición plantea dos preguntas:

1. ¿Como se define la longitud de una línea curva?
2. ¿Como sabemos que esa razón es la misma para todas las posibles circunferencias?

Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es la longitud de una línea, pero dar una definición matemática precisa es un problema distinto. La identificación del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con la recta real nos permite definir la longitud de un segmento rectilíneo. Para una línea curva, se define por aproximación mediante líneas quebradas inscritas. Este proceso puede llevarse a cabo para las llamadas curvas rectificables, de las que la circunferencia es un ejemplo. De hecho en este caso, lo usual es definir su longitud como el límite del perímetro de polígonos regulares inscritos o circunscritos cuando el numero de sus lados tiende a infinito.

Esta definición nos dá también la respuesta a la segunda pregunta. Por el teorema de Tales, si en un triángulo duplicamos dos de los lados y unimos los extremos de los lados duplicados, resulta un triángulo semejante al inicial, y el tercer lado también se ha doblado. Evidentemente lo mismo es cierto para cualquier otra razón de semejanza. Supongamos ahora que tenemos una circunferencia dada y duplicamos el radio. Por lo anterior, vemos que el perímetro de los polígonos regulares inscritos se duplica, y pasando al límite resulta que la longitud de la circunferencia se multiplica por dos.

El número π también aparece en la fórmula para el área del círculo de radio r, que viene dada por πr^2. Podemos llegar a esta fórmula a través de la aproximación del círculo por polígonos regulares. Si p_n es el perímetro del polígono regular inscrito (o circunscrito) y a_n su apotema, entonces su área es $p_n a_n/2$. Haciendo n tender a infinito se tiene que p_n converge a la longitud de la circunferencia, es decir a $2\pi r$, y a_n al radio, de donde resulta la fórmula del área. Para llevar a cabo este proceso he dado por supuesto que el área está bien definida como límite del área de polígonos inscritos. El problema de definir el concepto de área para regiones del plano llevó sucesivamente a la definición de la integral y la teoría de la medida.

2. HISTORIA DEL CÁLCULO DE π

El calcular cifras de π es un ejercicio que ha atraído desde siempre a matemáticos y científicos en general. La razón primera es de tipo práctico, ya que el valor de π es necesario para poder calcular con precisión áreas de círculos y volúmenes de cuerpos cilíndricos (por ejemplo almacenes de grano). Sin embargo la aplicación más sofisticada necesita no más allá de 30 cifras decimales, que ya fueron calculadas Ludolph van Leuden (1540-1610). ¿Por qué entonces ese ansia de calcular más y más cifras? Por una parte está la satisfacción personal que una persona puede alcanzar al batir un nuevo récord de cifras calculadas (como otras disfrutan haciendo "puenting" o subiendo al Everest por una ruta nueva). Pero la razón fundamental es en mi opinión el estudio de las propiedades estadísticas de la distribución de los dígitos 0, 1, ..., 9 en el desarrollo decimal de π, claro que también cabe preguntarse para qué quiere uno llevar a cabo ese estudio. Finalmente, en los últimos años el cálculo de unos cuantos millones de cifras de π se ha convertido en una prueba estándar para comprobar el "hardware" de los ordenadores.

2.1. **La antiguedad.**

2.1.1. *Egipto.* El valor de π documentado más antiguo, y también el más preciso hasta el advenimiento de Arquímedes, es el que se deduce del método usado por los antiguos egipcios para calcular el área de un círculo y que está explicado en un papiro conocido por el nombre del anticuario que lo compró en 1858.

El papiro Rhind fue encontrado a mediados del siglo pasado en las ruinas de un pequeño edificio contiguo al templo funerario de Ramsés II, y se encuentra en la actualidad en el Museo Británico en Londres (salvo pequeños fragmentos que se hallan en el Museo de Brooklyn).

Fue escrito por el escriba Ahmes alrededor del año 1950 A.C. (más exactamente en el cuarto mes de la estación de inundaciones en el año 33 del reinado del Rey Apophis). Consta de una serie de tablas matemáticas y problemas junto con su método de resolución. En los problemas 41-43 se calcula el volumen de un granero cilíndrico. En los problemas 48 y 50 se trata de áreas de terrenos circulares. El número 48 va acompañado de un pequeño diagrama.

La regla para calcular el área de un círculo es la siguiente:

1. tomar el diámetro del círculo
2. restarle una novena parte
3. elevar al cuadrado

Esto equivale a asignar a π un valor

$$4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} = 3{,}1604938\ldots,$$

y representa un error del 0,6% en el cálculo del área de un círculo. Cómo llegaron a este valor tan preciso es un misterio sobre el que solo cabe especular.

2.1.2. *Babilonia.* Los babilonios usaban la aproximación menos precisa $\pi = 3$, con un error en el cálculo del área de un círculo del 4,46%. Este valor está probablemente relacionado con su descubrimiento de que el lado de un hexágono regular inscrito en un círculo es igual a su radio.

2.1.3. *La Biblia.* El valor $\pi = 3$ aparece también de manera implícita en la Biblia. En el libro primero de los Reyes, capítulo 7, versículo 23 y en el libro segundo de las Crónicas, capítulo 4, versículo 2, puede leerse la descripción de un depósito de agua para el palacio del Rey Salomón:

"Hizo el Mar de metal fundido que tenía diez codos de borde a borde. Era enteramente redondo y de cinco codos de altura; un cordón de 30 codos medía su contorno".

Estas líneas han supuesto no pocos quebraderos de cabeza a los fundamentalistas que creen en la Biblia de manera literal.

2.2. **Grecia.** Los griegos demuestran un gran interés en el número π y en el problema de la cuadratura del círculo, cuya solución llegaría dos mil años más tarde.

2.2.1. *Los primeros matemáticos griegos.* Debemos a los matemáticos griegos, los creadores de la geometría como ciencia abstracta, el primer tratamiento sistemático de la cuadratura y rectificación del círculo.

Los más antiguos matemáticos griegos —Tales de Mileto (640-548 A. C. y Pitágoras de Samos (580-500 A.C.)— introdujeron la geometría egipcia en Grecia, pero se desconoce si trataron la cuadratura del círculo. Según Plutarco, Anaxágoras (500-428 A.C.) se entretuvo en prisión cuadrando el círculo.

Alrededor del 420 A.C., Hippias inventó una curva (la cuadratriz) que permite la construcción de π. Desgraciadamente (o afortunadamente), la curva es tan difícil de construir como el propio número π.

Los sofistas consideraron el problema, pero los primeros avances se deben a Antífonas y Bryson, contemporáneos de Sócrates, y que con sideraron por primera vez polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia.

Hipócrates, que vivió en Atenas en la segunda mitad del siglo V A.C., estudió formas geométricas curvilíneas que admiten cuadratura exacta. Intentó reducir el problema de la cuadratura del círculo a la de ciertas lúnulas (regiones entre dos circunferencias).

2.2.2. *Arquímedes.* El primer hito en la búsqueda de cifras de π, y el primer tratamiento del problema verdaderamente científico, lo pone Arquímedes (287-212 A.C.). Considerando polígonos inscritos y circunscritos de 96 lados, obtiene la aproximación

$$3{,}140845 = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3{,}142857\ldots$$

El método puede usarse en principio para calcular π con cualquier número de cifras. Variaciones de este método son las que se usan en los siguientes 1.800 años para calcular π, culminando con el trabajo de Ludolph van Leuden (1540-1610) que calculó 34 cifras correctas. Las limitaciones del método son una convergencia lenta y la necesidad de calcular raíces cuadradas.

2.2.3. *Los últimos matemáticos griegos.* Con posterioridad a Arquímedes, Hiparco (180-125 A.C.) calcula la primera tabla de cuerdas de un círculo, fundando la trigonometría. La mayor contribución en esa dirección se debe a Ptolomeo (87-165 D.C.), cuyas tablas de cuerdas estuvieron en vigor durante 1.000 años. Fue además el primero en obtener una aproximación de π mejor que la de Arquímedes:

$$\pi = 3°8'30'' = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3.600} = 3{,}14166\ldots$$

2.3. **Oriente.**

2.3.1. *India.* Áryabhatta (alrededor del año 500 D.C.) conocía el valor

$$\pi = \frac{62.832}{20.000} = 3{,}1416.$$

El mismo valor en la forma

$$\frac{3.927}{1.250}$$

fue dado por Bhâskara (nacido en el 1114 D.C.), quien lo describe como exacto, en contraste con el valor inexacto

$$3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}\,.$$

Obtuvo este resultado como Arquímedes, calculando los perímetros de polígonos regulares inscritos en una circunferencia de 12, 24, 48, 96, 192 y 348 lados.

Brahmagupta (nacido en el 598 D.C.) da como exacto el valor

$$\pi=\sqrt{10} = 3{,}1622\ldots$$

2.3.2. *China.* Los matemáticos chinos más antiguos, de la época de ChouKong (siglo 12 A.C.) usaban la aproximación $\pi = 3$. Hasta el siglo tercero de nuestra época hay varios "cuadradores del círculo" que determinan diversos valores para π, entre los que se encuentran

$\sqrt{10}$ (Chang Hing, muerto en el año 139 D.C.),

$\frac{142}{45} = 3{,}1555...$ (Wang Fau) y

$\frac{157}{50} = 3{,}14$ (Liu Hui, 263 D.C.)

La más interesante de todas las determinaciones es la del astrónomo Tsu Ch'ung-Chih (nacido en el año 430 D.C.), quien prueba que

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

y encuentra los dos valores

$$\frac{22}{7} \text{ y } \frac{355}{113} = 3{,}1415926...$$

El primero de ellos es el valor dado por Arquímedes, pero el segundo, de gran precisión, no fue hallado ni por los indios ni los griegos, y fue redescubierto en Europa más de mil años después por Adriaen Anthonisz (1527-1607).

2.3.3. *Los árabes.* En la Edad Media los árabes introducen las matemáticas griegas e indias en Europa, principalmente a través de traducciones de las obras de Euclides, Ptolomeo y Arquímedes. En el siglo noveno Al Warizmi da para π

el valor griego $3\frac{1}{7}$ y los indios $\frac{62.832}{2.000}$ y $\sqrt{10}$.

2.4. **El renacimiento.**

2.4.1. *Leonardo Pisano, alias Fibonacci.* Vivió en Pisa a finales del siglo XII. Mejora los resultados de Arquímedes con las aproximaciones

$$\frac{1.440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1.440}{458\frac{1}{5}}$$

Toma la media de la estimación superior e inferior para obtener

$$\pi = \frac{1.440}{458\frac{1}{3}} = 3{,}1418...$$

En este período no hay prácticamente avances. Algunos autores posteriores creen que $3\frac{1}{7}$ es el valor exacto de π. George Purbach (1423-1461) conoce los valores de Arquímedes y los matemáticos indios, y duda de que exista un valor exacto.

2.4.2. *Nicolás de Cusa.* El Cardenal Nicolás de Cusa (1401-1464) obtuvo el valor $\pi = 3{,}1423$ que creía exacto, lo que le valió el sobrenombre de "cuadrador del círculo". Por cierto que Aristófanes utiliza en su obra "Los pájaros" el mismo término "cuadrador del círculo" para referirse a quien dedica su vida a una tarea imposible. En cualquier caso, gran parte del desarrollo de las matemáticas entre los griegos se produce como consecuencia de intentar resolver problemas imposibles.

2.5. **Los siglos XVI y XVII.** Copérnico y Kepler entre otros introducen grandes avances en la trigonometría, que servirán como base para los desarrollos analíticos del siguiente período. Leonardo da Vinci y Alberto Durero, ambos grandes artistas, dedicaron parte de su tiempo a la cuadratura del círculo sin ningún logro reseñable. Andrea Anthonisz (1527-1607) redescubre el valor chino $\frac{355}{113}$.

2.5.1. La fórmula de Vieta. Francisco Vieta (1540-1603) da la primera expresión explícita de π en forma de producto infinito:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots\ldots$$

La obtiene por métodos todavía geométricos. También calcula π, usando polígonos de $6 \cdot 2^{16} = 393.216$ lados, con 9 cifras decimales.

2.5.2. Ludolf van Ceulen (Colonia, 1539-1610). Realiza el último cálculo con el método de Arquímedes, llegando hasta 34 cifras, que ordenó esculpir en su tumba. En Alemania se conoce aún hoy a π como número de Ludolph.

2.5.3. Snelliuss y Huyghens. Willebord Snellius y Christian Huyghens llevan hasta el límite el método geométrico. A través de una serie de 16 teoremas, Huyghens obtiene a partir de el triángulo los valores para los que antes eran necesarios polígonos de 96 lados, y con el hexágono obtiene 9 cifras decimales exactas, mientras que el método de Arquímedes proporciona $3 < \pi < 3{,}464$.

2.5.4. Descartes. Modifica el método de Arquímedes, expresándolo como una iteración para dos sucesiones, en una manera que se asemeja al algoritmo de la media aritmético-geométrica de Gauss.

2.6. **La irrupción del cálculo.** Uno de los efectos del nuevo cálculo diferencial e integral desarrollado por Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) fue el de reemplazar los métodos geométricos para el cálculo de π por métodos analíticos.

2.6.1. Fórmula de Wallis. John Wallis (1616-1703), mediante un cálculo complicado que precisa de una prodigiosa intuición numérica, encuentra el producto infinito

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \ldots}$$

Tiene la ventaJa sobre la fórmula de Vieta de que solo necesita operaciones racionales.

2.6.2. La fracción continua de Lord Brounker. Unos años rnás tarde Lord Brounker (1620-1686), primer presidente de la Royal Society, lo reescribe como una fracción continua:

(1)

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ldots}}}}}$$

El método más utilizado en la práctica para el cálculo de π (al menos hasta la década de los 80) lo establece el matemático escocés James Gregory (1638-1671) al obtener el desarrollo en serie de potencias de la función arctan:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

válido para $-1 \leq x \leq 1$. Poniendo $x = 1$ se obtiene

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

conocida como serie de Leibniz, quien la descubrió en 1674 y la publicó en 1682. Sin embargo ya era conocida por Gregory y Newton. En cualquier caso no es muy útil como método práctico de cálculo debido a lo lento de su convergencia. Si sumamos 500.000 términos obtenemos solo 5 cifras decimales correctas. Sin embargo tenemos el siguiente fenómeno. En la suma de esos 500.000 primeros calculada con 40 cifras decimales, se tiene

$$4 \sum_{n=0}^{499.999} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 3{,}14159\boxed{0}6535897932\boxed{4}04626433832\boxed{6}9502884197,$$

y las únicas cifras incorrectas son las recuadradas.

Es claro que cuanto más pequeño sea x más rápidamente convergerá la serie. A principios del siglo XVII, Abraham Sharp, bajo la dirección del astrónomo E. Halley, obtuvo 71 cifras usando la serie del arctan con $x = 1/\sqrt{3}$, que corresponde a $\frac{\pi}{6}$,

y con $x = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, que corresponde a $\frac{\pi}{12}$

El mismo Isaac Newton calculó 15 cifras de π mediante la fórmula

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \ldots\right),$$

confesando sentirse avergonzado por ello.

2.7. **Leonard Euler (1707-1783).** Euler ha sido uno de los más grandes analistas (y científicos) de todos los tiempos. Presentamos algunos de sus resultados más relevantes en relación con el número π.

La forma moderna de la trigonometría es debida a Euler. El introduce las funciones sen, cos y tan como razones de los lados de un triángulo rectángulo y por tanto como funciones de una magnitud angular. La costumbre de usar los símbolos π (introducido por William Jones en 1706) y e es debida a él. Esta forma de considerar las funciones trigonométricas como funciones analíticas del ángulo, llevó a Euler a uno de sus grandes descubrimientos, la relación entre las funciones trigonométricas y la función exponencial. Fruto de ella es la siguiente identidad, en la que figuran los números más importantes:

$$e^{\pi i}+1=0.$$

También calculó cifras de π, y demostró varias fórmulas en las que interviene el número π. En 1775 obtuvo una nueva serie para arctan:

$$\text{(2)} \qquad \arctan x = \frac{x}{1+x^2}\left\{1+\frac{2}{3}S+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}S^2+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}S^3+\ldots\right\},$$

donde $S = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Esta serie es más eficiente computacionalmente que la de Gregory por ser de términos positivos y porque $S < x^2$. En conjunción con la fórmula

$$\pi = 20 \arctan\frac{1}{7} + 8 \arctan\frac{3}{79}$$

le permitió calcular 20 cifras de π en menos de una hora.

Encontró varias fórmulas notables en las que aparece π, entre las que merece la pena destacar las siguientes series, cuya suma Bernoulli no pudo lograr:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

2.7.1. *La fórmula de Machin*. John Machin (1680-1752) halla en 1706 la fórmula que lleva su nombre:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239},$$

Junto con la serie para el arctan proporciona un método eficiente de cálculo. La segunda serie converge rápidamente, mientras que la primera puede reducirse a cálculos con denominadores potencias de 10. Machin calculó así 100 cifras en el año 1706.

En los siguientes 200 años hay pocos cambios en los métodos de cálculo de π, que se basan fundamentalmente en variaciones de la fórmula de Machin. Por ejemplo, en 1884 Johann Dase usó la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$$

para calcular 200 cifras de π. Dase podía calcular en la cabeza productos de números de 100 cifras en un tiempo de unas 8 horas. A recomendación de Gauss, la Academia de Ciencias de Hamburgo pagó a Dase para factorizar los enteros entre 7.000.000 y 10.000.000. Como dice Beckmann en su libro sobre la historia de π:

Parece que Gauss, quién ha sido el primero en obtener resultados en muchas ramas de las matemáticas, fue también el primero en pagar por tiempo de CPU.

El zenit de los cálculos *a mano* se alcanza con Wiliam Shanks (1812-1882), quien publica primero 607 cifras (1853) y más tarde 707. Sin embargo comete un error en la cifra 528, error que pasó desapercibido hasta que en 1945 D.F. Ferguson, en una de los últimos cálculos hechos a mano, halla 530 cifras. En 1947, usando una calculadora de mesa, calcula 808 mediante la fórmula:

$$\frac{\pi}{4} = 3 \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{1}{20} + \arctan \frac{1}{1.985}\ .$$

2.8. **La época moderna.** Con la aparición de los ordenadores el cálculo de cifras de π cobra una nueva dimensión. Los récords van cayendo uno tras otro. Los primeros cálculos utilizan todavía la fórmula de Machin o similares.

- En Junio de 1949, Metropolis, Reitweiser y von Neumann calcularon y analizaron 2.037 cifras de π con el ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) mediante la fórmula de Machin. El cálculo duró 70 horas.
- En 1959 se calculan 16.167 cifras en un IBM 704 en 100 minutos.
- En 1961, con una fórmula tipo Machin, D. Shanks y Wrench pasan la barrera de las 100.000 cifras en un IBM 7090 en un tiempo de 9 horas.
- El millón de cifras lo sobrepasan Guilloud y Bouyer en 1973 en un CDC 7600, todavía con una fórmula tipo Machin.

A partir de aquí se introducen nuevos algoritmos basados unos en la media aritmético-geométrica de Gauss y otros otros en la teoría de transformaciones de integrales elípticas descubierta por S. Ramanujan. Los hitos son los siguientes:

- Kanada, Tamura, Yoshino y Ushiro (1983), 16.000.000 de cifras en un HITAC M-280H en menos de 30 horas, usando un algoritmo basado en la media aritmético-geométrica de Gauss y multiplicación rápida basada en FFT (Fast Fourier Transform, transformada de Fourier rápida).
- W. Gosper (1985), 17.000.000 usando la fracción continua de π y la siguiente fórmula debida a Ramanujan y que se basa en una identidad modular de orden 58:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9.801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}\ \frac{1.103 + 26.390\ n}{396^{4n}}.$$

  El cálculo detectó ligeros errores de diseño del hardware en el ordenador (un Symbolics 3670) que habían pasado desapercibidos en cálculos a menor escala. De hecho en la actualidad el cálculo de unos cuantos millones de cifras de π se usa para comprobar el estado del hardware de un ordenador.

- En Enero de 1986 D. H. Bailey calcula 29.360.000 cifras de π en el CRAY-2 del Centro de Investigación Ames de la NASA. Utiliza 12 iteraciones de un algoritmo debido a Borwein & Borwein de orden 4 para $1/\pi$, usando como comprobación 24 iteraciones de un algoritmo de orden 2 descubierto también por los Borwein.
- En septiembre de 1986 Kanada recupera el récord al calcular $2^{25} = 33.954.432$ cifras, reduciendo el tiempo de cálculo a una quinceava parte del utilizado en 1983. Utiliza para ello un algoritmo de orden 2, debido a Gauss pero hecho explícito por Brent y Salamin. En enero de 1987 extiende el cálculo hasta 2^{27} cifras, superando la marca de los 100 millones. En enero de 1988 calcula 201.326.000 cifras en un supercomputador Hitachi S-820.

- La última hazaña de la que tengo noticia es el cálculo por los hermanos Chudnovsky de más de dos mil millones de cifras. Utilizan para ello la siguiente fórmula tipo Ramanujan, que no fue descubierta por él:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{53.360\sqrt{640.320}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(k_1 + nk_2)(6n)!}{(n!)^3 (3n)! (8 \cdot k_3 \cdot k_4)^n}$$

donde $k_1 = 13.591.409$, $k_2 = 545.140.134$, $k_3 = 1.001.000.025$ y $k_4 = 327.843.840$. El ordenador fue diseñado especialmente para el cálculo.

3. MÉTODOS DE CÁLCULO DE π

3.1. **Dos métodos experimentales para aproximar π**. No se conoce en muchos casos la manera en que se llegó a los diversos valores de π usados en la antiguedad. Yo voy a proponer dos posibles métodos, que no necesitan más conocimiento matemático que el de medir, dividir y contar. Ambas son experimentales, y se basan en la relación de π con la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

La primera consiste simplemente en medir la longitud de una circunferencia, medir el diámetro y calcular su cociente. El resultado será evidentemente aproximado debido a los errores de medición y a la imposibilidad de construir una circunferencia perfecta.

La relación de π con el área del círculo proporciona el segundo método para su cálculo. Tomamos una hoja de papel cuadriculado y trazamos con un compás un cuadrante de circunferencia de radio por ejemplo 10 cuadrados. El área del cuadrante será de $100\pi/4 = 25\pi$ cuadrados. El número de cuadrados totalmente contenidos dentro del cuadrante dividido por 100 será una aproximación (por debajo) de π, y el número de cuadrados que tienen intersección no vacía con el cuadrante dividido por 100 será otra aproximación, esta vez por arriba.

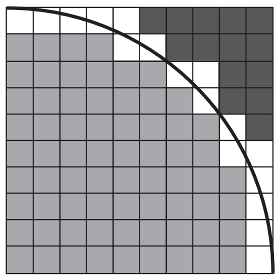

FIGURA 1. Método elemental de aproximar π

Contando cuadros en la figura 1, resulta que hay 69 dentro y 86 que tocan.

Por lo tanto

$$2{,}76 = \frac{69}{25} < \pi < \frac{86}{25} = 3{,}44$$

Podemos mejorar esta aproximación de dos maneras:

1. aumentando el número de cuadrados;
2. calculando *a ojo* qué fracción de los cuadrados que tocan la circun ferencia cae dentro del círculo.

3.2. **Métodos geométricos.** Son métodos que utilizan la definición de la longitud de la circunferencia como límite del perímetro de polígonos inscritos o circunscritos. Su convergencia es lenta y precisan del cálculo de raíces cuadradas.

3.2.1. *El método de Arquímedes.* Sea P_n un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio 1 y sea l_n la longitud de su lado. El perímetro será entonces nl_n y podremos aproximar π por

$$\pi_n = \frac{nl_n}{2}.$$

La idea de Arquímedes es partir de un polígono cuyo lado es conocido e intentar calcular a partir de él el lado del polígono con el doble número de lados. Su método está íntimamente unido al *método de exhaución*, que le permite demostrar (con un rigor homologable al exigido actualmente) que la longitud de la circunferencia puede aproximarse tanto como se quiera por el perímetro de polígonos inscritos y circunscritos. Obtiene además una estimación inferior y otra superior para el valor de π. En todo momento es consciente de que no obtiene el valor exacto de π, sino aproximaciones. La figura 2 representa los polígonos regulares de n y $2n$ lados inscritos en una circunferencia de centro O y radio 1. En ella

$\overline{OA} = \overline{OB} = 1$, $\overline{AB} = l_{2n}$ y $\overline{AC} = l_n$.

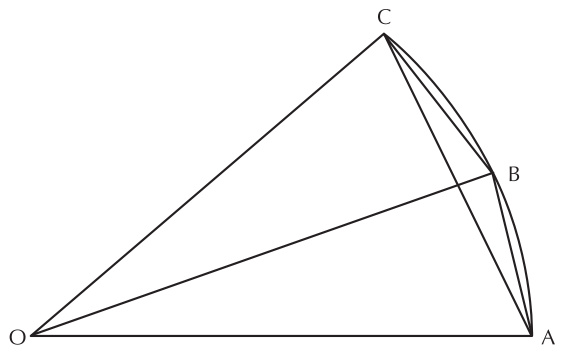

FIGURA 2. El método de Arquímedes

Calculamos el área del triángulo OAB de dos formas distintas. Por un lado, la longitud del lado OB es 1, y la altura sobre ese lado es $l_n/2$, de donde resulta

$$\text{área de } OAB = \frac{1}{4}\, l_n.$$

Por otro, el triángulo es isósceles, siendo la longitud de sus lados iguales 1 y la del otro lado l_{2n}. La longitud de la altura, por el Teorema de Pitágoras es $\sqrt{1} - (l_{2n}/2)^2$, y por tanto

$$\text{área de } OAB = 2\,\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{l_{2n}}{2}\right)^2} = \frac{l_{2n}}{2}\sqrt{4-\left(l_{2n}\right)^2}$$

Igualando las dos expresiones y despejando l_{2n}, queda

$$l_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-(l_{2n})^2}}$$

lo que permite calcular por recurrencia el perímetro del polígono de $2^k n$ lados conocido el del polígono de n lados.

Arquímedes comenzó con el hexágono P_6, para el que $l_6 = 1$ y $\pi_6 = 3$.

Tenemos entonces:

$$\pi_{12} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}} = 3{,}105828$$

$$\pi_{24} = 12\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 3{,}132629$$

$$\pi_{48} = 24\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 3{,}139350$$

$$\pi_{96} = 48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} = 3{,}141032$$

En realidad no obtuvo estos valores, sino que evita el cálculo de raíces cuadradas utilizando desigualdades, para obtener

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}\;.$$

Descartes considera polígonos regulares de n lados ($n \geq 3$) y de perímetro fijo 2. Llamando r y R a los radios de los correspondientes círculos inscritos y circunscritos tenemos

$$2\pi r < 2 < 2\pi R \Rightarrow \frac{1}{R} < \pi < \frac{1}{r}\;.$$

Como en el método de Arquímedes, en primer lugar obtendremos los radios de los círculos inscrito y circunscrito del polígono regular con el doble número de lados y también perímetro 2, que llamamos r^* y R^*. Se tiene entonces

$$r^* = \frac{1}{2}(r+R) \text{ y } R^* = \sqrt{Rr^*}\,.$$

Fijemos ahora como polígono inicial un hexágono, para el que $r = \frac{1}{3}$ y $R = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Construimos las sucesiones $\{r_n\}$ y $\{R_n\}$ de manera recurrente por las fórmulas

$$\begin{cases} r_0 = \dfrac{1}{3} \\[2ex] R_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} r_{n+1} = \dfrac{1}{2}(r_n + R_n) \\[2ex] R_{n+1} = \sqrt{R_n\, r_{n+1}} \end{cases} \qquad n \geq 0.$$

Entonces

$$\frac{1}{R_n} < \pi < \frac{1}{r_n}\,,$$

y las sucesiones $\{\frac{1}{R_n}\}$ y $\{\frac{1}{r_n}\}$ convergen a π. Además

$$\frac{1}{r_{n+1}} - \frac{1}{R_{n+1}} \leq \frac{\pi R_n}{4}\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{R_n}\right).$$

Puesto que $\frac{\pi R_n}{4} < 1$

el método converge linealmente, y (asintóticamente) en cada iteración el error se divide por 4.

3.3. **Métodos analíticos.** Con el nacimiento del cálculo infinitesimal surgen nuevas herramientas para el cálculo de π. La fórmula de Wallis (como la de Vieta) si bien dan una expresión cerrada para π, no son muy útiles para su cálculo. El primer avance serio se produce con el descubrimiento por James Gregory de la serie de potencias para la función arctan:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \qquad |x| < 1.$$

La serie converge absolutamente para $|x| < 1$, y condicionalmente para $x = \pm 1$. Dando valores particulares a x podemos obtener fórmulas para π. La convergencia de la serie será más rápida cuanto más pequeño sea x. Abraham Sharp calculó 71 cifras usando $x = 2 - \sqrt{3} = 0,267949$.

Hay toda una colección de fórmulas que permiten aproximar π mediante la serie de Gregory usando valores pequeños de x, lo que acelera la convergencia del método. Algunas de ellas se han usado para calcular millones de cifras de π. A continuación presento las más eficientes para el cálculo. Con el fin de simplificar la escritura, usaremos la notación

$$[x] = \arctan \frac{1}{x}.$$

$\frac{\pi}{4} = [2] + [3]$	Euler
$= [2] + [5] + [8]$	Daze
$= 2\,[3] + [7]$	Clausen
$= 4\,[5] - [239]$	Machin
$= 8\,[10] - [239] + 4\,[515]$	Klingestierra
$= 12\,[18] + 8\,[57] - 5\,[239]$	Gauss

Son conocidas como fórmulas tipo Machin. La más sencilla es la de Euler

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}. \tag{3}$$

Hay dos maneras de probarla. Una analítica usando la fórmula para la tangente de una suma, y otra geométrica, que se expone a continuación. En la siguiente figura, el triángulo ABC es rectángulo en B e isósceles.

Por lo tanto el ángulo A mide π/4 radianes, mientras que

$$\alpha = \arctan \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \arctan \frac{1}{3}.$$

Las fórmulas más eficientes, en función del número de términos que se debe evaluar son la de Machin, la de Klingestierra y la de Gauss. En la práctica es habitual realizar los cálculos con dos de ellas como comprobación. Las de Machin y Klingestierra tienen la ventaja de que las series [5] y [10]

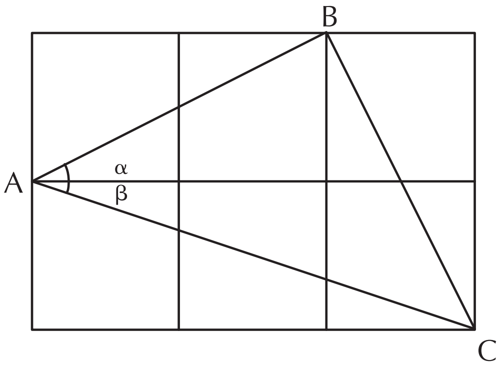

FIGURA 3. Demostración geométrica de la igualdad (3)

son de cálculo casi inmediato en base decimal. Sin embargo la de Gauss, cuando se utiliza junto con la serie de Euler (2), es más eficiente, pues

$$x = \frac{1}{18} \geqslant S = \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{325}$$

y

$$x = \frac{1}{57} \geqslant S = \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{3.250}$$

Desde un punto de vista práctico, esto quiere decir que basta con calcular los términos de la serie [18], ya que los de la serie [57] se obtienen multiplicando por potencias negativas de 10 (lo que implica un desplazamiento a la derecha de las cifras decimales).

Los términos de la serie se calculan de manera sucesiva de forma recurrente:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{2}{3} S\, a_1\ ,\ a_3 = \frac{4}{5} S\, a_2 ,\ldots,\ a_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} S\, a_n\ ,\ldots$$

3.4. **La media aritmético-geométrica de Gauss.** La media aritméticogeométrica fue descubierta por Lagrange, y redescubierta por Gauss a la edad de 14 años. Nueve años más tarde publicó un artículo exponiendo muchas de sus propiedades.

Sean $a > b$ números reales. Las medias aritmética y geométrica son respectivamente

$$\frac{a + b}{2}\ , \qquad \sqrt{ab}.$$

Geométricamente, si a y b son los lados de un rectángulo, la media aritmética de a y b es el lado de un cuadrado con el mismo perímetro que el rectángulo original, mientras que la geométrica es el lado de un cuadrado con la misma área. Llamamos a_1 a la media aritmética de a y b y b_1 a su media geométrica. Definimos de manera recurrente una sucesión

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\ , \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\,.$$

Es fácil comprobar que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente, $\{b_n\}$ creciente y que ambas convergen a un mismo límite, la media aritmético-geométrica de a y b, que denotamos por $M(a, b)$. La convergencia de las sucesiones es además cuadrática. Definimos

$$c_n^2 = a_n^2 - b_n^2\,.$$

Se comprueba fácilmente que

$$c_{n+1} \leq \frac{1}{4M(a,b)} c_n^2 .$$

La media aritmético-geométrica está íntimamente relacionada con las funciones elípticas. Una de las relaciones (debida a Gauss) que tiene que ver con el problema que nos ocupa es

$$2\ M\,(a,b) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x}} = \pi$$

Esta fórmula y otra debida a Legendre permiten obtener la siguiente fórmula para π :

$$\pi = \frac{4M^2\,(1,1/\sqrt{2})}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}\, c_n^2}$$

donde $a = 1$, $b = 1/\sqrt{2}$ y c_n se define como antes. En 1976 Salamin redescubrió la fórmula, estableciendo un algoritmo cuadrático para el cálculo de π.

Debe compararse el algoritmo de la media aritmético-geométrica con el de Descartes, muy parecidos formalmente, pero uno de convergencia cuadrática y el otro lineal.

La media aritmético-geométrica puede utilizarse también para el cálculo de numerosas funciones especiales.

3.5. **Identidades modulares.** Existe una íntima relación, que yo no dudaría en llamar bella, entre la teoría de transformación de funcion es elípticas, las funciones theta, ecuaciones modulares y la aproximación de π. El primero en hacerla explícita fue el matemático indio Ramanujan, quien en 1914 publicó un artículo en el que entre otras aparece la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9.801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1.103 + 26.390n}{396^{4n}}$$

El primer término de la serie proporciona

$$\pi \approx \frac{9.801}{1.103\sqrt{8}} = 3{,}14159273001\ ...$$

La convergencia de la serie es muy rápida. Una serie similar descubierta por los hermanos Chudnovsky es

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{53.360\sqrt{640.320}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(k_1 + nk_2)\,(6n)!}{(n!)^3\,(3n)!\,(8{\cdot}k_3{\cdot}k_4)^n}$$

donde $k_1 = 13.591.409$, $k_2 = 545.140.134$, $k_3 = 1.001.000.025$ y $k_4 = 327.843.840$.

El primer término da

$$\pi = \frac{13.591.409}{53.360\sqrt{640.320}} = 3{,}14159265359\ ...$$

Cada nuevo término añade 14 decimales correctos.

El interés de Ramanujan era el de obtener aproximaciones al gebraicas de π. J.M. y P.M. Borwein construyen algoritmos iterativos, íntimamente relacionados con el análisis de Ramanujan. David H. Bailey calculó en 1988, 29.360.000 decimales de π mediante el siguiente algoritmo:

Sean $\alpha_0 = 6 - 4\sqrt{2}$ e $y_0 = \sqrt{2} - 1$. Se definen de manera recurrente

$$y_{n+1} = \frac{1 - (1 - y_n^4)^{1/4}}{1 + (1 - y_n^4)^{1/4}}$$

y

$$\alpha_{n+1} = (1 + y_{n+1})^4\, \alpha_n - 2^{2n+3}\, y_{n+1}\,(1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2)$$

Entonces α_n converge con orden 4 a $\frac{1}{\pi}$ y

$$0 < \alpha_n - \frac{1}{\pi} < 164^n\, e^{-2\cdot\pi\cdot 4^n}$$

Cada iteración cuadruplica el número de decimales correctos. Además el método es autocorrector. Esto tiene la ventaja de que no es necesario hacer todas las operaciones con la precisión deseada al final. Basta realizar cada iteración con una precisión igual a los decimales correctos que van a obtenerse.

3.6. **Multiplicación rápida.** El cálculo de tantas cifras decimales hace necesario tener rutinas altamente eficientes para aritmética de precisión. La mayoría de los compiladores actuales son capaces de trabajar en precisión cuádruple (unas 32 cifras decimales), lo que es suficiente en casi todos los casos. Sin embargo estamos tratando con problemas que exigen multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas de números de varios millones de cifras. Las dos últimas operaciones citadas pueden llevarse a cabo mediante multiplicaciones y un algoritmo iterativo. Los mejores algoritmos de multiplicación en multi-precisión utilizan versiones de FFT (transformada rápida de Fourier).

3.7. **Fracciones continuas.** Lord Brounker dio el primer desarrollo de π como fracción continua (ecuación (1)) alrededor de 1659. El desarrollo en fracción continua regular (o sea, con todos los numeradores iguales a 1) es

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}} \tag{1}$$

No hay ninguna regularidad en la sucesión de denominadores, y la única manera de calcularlos es a partir del desarrollo decimal de π. Otros desarrollos (no regulares) pero con regularidad en los numeradores y denominadores son:

$$\pi = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \dots}}}}$$

y

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \dots}}}}$$

Este último es debido a L.J. Lange en 1999.

3.8. **La última fórmula.** En 1995 D. Bailey, P. Borwein y S. Plouffe descubrieron la siguiente fórmula:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right).$$

Lo más chocante de esta fórmula es que permite calcular la n-ésima cifra de π en base 16 sin necesidad de calcular las anteriores. En todos los métodos mencionados anteriormente, se calculan de golpe todas las cifras desde la primera a la n-ésima. Desafortunadamente no se conoce ninguna fórmula similar que permita hacer lo mismo en base 10.

4. LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

El problema de la cuadratura del círculo consiste en construir un cuadrado con un área igual a la de un círculo dado. Era bien sabido ya por los griegos que es un problema equivalente a la rectificación de la circunferencia. La solución debe dar los vértices del cuadrado mediante un número finito de las operaciones que pueden realizarse con regla y compás para determinar un punto. Llevadas estas a la práctica darán una solución física del problema, que será inexacta debido a la imperfección de los instrumentos, el grosor de las líneas dibujadas, etcétera. Es probablemente este error de la solución física lo que llevó a muchos cuadradores del círculo a creer que habían resuelto un problema que hoy sabemos que no tiene solución.

Además de la historia científica del problema, tiene una historia de otro tipo, debido al hecho de que en todo tiempo, pasado y presente, ha atraído la atención de personas que, sin los conocimientos necesarios para comprender la naturaleza del problema, se dedican a su resolución con devoción y entusiasmo. Como norma general man tienen la validez de su solución pese a los esfuerzos de de genuinos matemáticos para sacarlos de su error. El tipo de soluciones que propugnan los "cuadradores del círculo" va desde los intentos más fútiles que traslucen una total falta de capacidad para el razonamiento lógico hasta aproximaciones ingeniosas que demuestran una gran inventiva. Las sociedades científicas y las secciones de cartas al director de los periódicos reciben con frecuencia escritos de estos aficionados, generalmente acompañadas de quejas de incomprensión y conspiración en su contra. Ya en tiempos de los griegos el término τετραγονιζες (el que se ocupa en la cuadratura) se utilizaba para designar a quien se dedica a tareas imposibles (por ejemplo, en la obra "Los pájaros", de Aristofanes). En el año 1775 la Academia de París se vio obligada a aprobar una resolución por la que no se examinarían más soluciones de la duplicación del cubo, trisección del ángulo o cuadratura del círculo, y lo mismo se aplicaría a máquinas de movimiento continuo. Es curiosa la seguridad de los matemáticos de la época en la imposibilidad de esas construcciones, cuya prueba tardó todavía 100 años en llegar.

4.1. **Thomas Hobbes.** De entre los innumerables cuadradores del círculo destaca el filósofo inglés Thomas Hobbes (1588-1679). Un punto clave en el desarrollo de su pensamiento filosófico se produce alrededor de 1629, cuando lee los Elementos de Euclides. Queda tan impresionado por el método deductivo que le parece el único posible para el avance de la ciencia y la filosofía. Esto le enfrenta a los que abogan por el método inductivo-experimental, entre los que se encuentran Roger Bacon, el astrónomo Seth Ward y el matemático John Wallis.

La publicación de "De Corpore", en la que influenciado por Galileo pretende explicar todos los fenómenos físicos en términos de movimiento y en el que incluye un método para cuadrar el círculo, da pie a Wallis para refutar sus matemáticas, y de paso ridiculizar sus teorías filosóficas y políticas. Hobbes replica traduciendo su libro al inglés y añadiendo un epílogo de título "Seis lecciones a los Profesores de Matemáticas de Oxford". La polémica continúa por ambas partes con algunas interrupciones hasta la muerte de Hobbes a los 90 años. Entre tanto publica "De la Cuadratura del Círculo, la Duplicación del Cubo y la Trisección del Ángulo".

4.2. **El valor legal de π.** Otro insigne cuadrador fue Edward Jonhston Goodwin (1828?-1902), médico de Solitude, Indiana. En 1892 publica "Desigualdad Universal es la Ley de Toda la Creación", en la que incluye el comentario:

> En la primera semana de Marzo, 1988, el autor fue enseñado de forma sobrenatural la medida exacta del círculo ... ninguna autoridad en la ciencia de los números puede decir como fue descubierta

Patentó sus resultados en U.S.A., Inglaterra, Alemania, Bélgica, Francia Austria y España. En 1984, primer año de existencia del *American Mathematical Monthly*, publica "Cuadratura del Círculo", con la nota "Publicado a petición del autor". El Dr. Goodwin convenció a su representante en el Parlamento de Indiana para que presentase una proposición de ley cuyo texto era casi idéntico al del artículo del *Monthly*. Comienza así:

> Una proposición de ley introduciendo una nueva verdad matemática ofrecida como contribución a la educación y para uso exclusivo del estado de Indiana libre de todo costo, siempre que sea aceptada y adoptada por la legislatura de 1887. ARTICULO 1. Se legisla por la Asamblea General del estado de Indiana que ha sido hallado que un área circular es al cuadrado de lado igual al cuadrante de la circunferencia como el área de un rectángulo equilátero es a uno de sus lados....

Esto parece querer decir que $\pi D^2/4 = (\pi D/4)^2$, *de donde* $\pi = 4$.

ARTICULO 2. Además, ha revelado la razón de la cuerda y arco de 90°, que es como siete a ocho, y también la razón de la diagonal y el lado de un cuadrado, que es como 10 a 7.

Según esto $\sqrt{2}R : \pi R/2 = 7 : 8$, *de donde* $\pi = 16\sqrt{2/7} = 3{,}232488...$,
y $\sqrt{2} = 10/7 = 1{,}428571...$

La ley estuvo a punto de ser aprobada. Y si no lo fue no es porque se esgrimieran argumentos científicos, sino porque la materia de la que trataba no era susceptible de legislación.

4.3. **Ejemplos más cercanos.** Como ejemplos más cercanos citaré tres casos de este siglo y en España, para terminar con una anécdota reciente del examen de selectividad. El primero es el de un maestro de Alcantarilla (Murcia) de nombre Férez, que publicó un libro en la Editorial Nacional en el que entre un sinfín de disparates probaba por un razonamiento ontológico que π es racional.

El segundo es un personaje cuyo nombre no recuerdo, y que a raíz de una visita del matemático soviético Nikolski a la UPV/EHU, publicó una carta en el periódico El Correo Español y el Pueblo Vasco en la que decía haber cuadrado el círculo y apostaba un millón de pesetas a que ni Nikolski ni ningún otro matemático eran capaces de refutar su prueba.

El último es un "escrito" enviado por Imanol y Juan Aizpurua al Departamento de Matemáticas de la UPV/EHU y titulado *Método operativo simplificado en la resolución de ciertos problemas sobre cuerpos geométricos. Y breve comentario sobre la cuadratura del círculo.* En el se dicen cosas como que según para que se use, π puede valer una cosa u otra.

Para terminar este apartado quiero relatar el susto que me llevé cuando en la prueba de selectividad de 1993 vi con horror que uno de los problemas de dibujo pedía rectificar la circunferencia. El profesor de la disciplina me tranquilizó diciendo que se pedía una construcción geométrica basada en la siguiente aproximación de π:

$$\pi = \sqrt{3} + \sqrt{2} = 3{,}1462...$$

Si la circunferencia tiene radio 1, entonces los lados del triángulo equilátero y cuadrado inscritos tienen longitud $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ respectivamente.

4.4. **La solución del problema.** El primer paso en la demostración de la imposibilidad de la cuadratura del círculo lo dio J. H. Lambert (1728-1777). En un artículo publicado en 1768 prueba que π y e son irracionales. Una demostración accesible a quienes han hecho el curso de Análisis I se encuentra en el libro Calculus de M. Spivak.

Esto no dice nada en cuanto a la constructibilidad de π, pues muchos irracionales son constructibles, como descubrieron con gran sorpresa los griegos. De hecho, los números constructibles son aquellos que pueden obtenerse mediante un número finito de operaciones racionales y raíces cuadradas.

Charles Hermite da en 1873 una nueva prueba de la irracionalidad de π y π^2, de interés por ser el germen de la demostración de la transcendencia de π. Números transcendentes son aquellos que no son raíz de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. Si bien casi todos los números son transcendentes, el primer ejemplo explícito se debe a Liouville en

1840. En 1873 Hermite prueba que *e* es transcendente, y en 1882 Lindemann enuncia su teorema del que se deduce que π es transcendente, y por tanto la cuadratura del círculo imposible.

Se sabe que $e^{\pi} = (-1)^{-i}$ es transcendente, así como $\pi + \log 2 + \sqrt{2} \log 3$. Sin embargo no se sabe si $\pi + e$, π / e o $\log \pi$ son irracionales. Otros números famosos sobre los que se sabe poco son la constante de Euler-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

y los valores de la función ζ de Riemann:

$$\zeta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^x}, \; x > 1.$$

Se sabe calcular $\zeta(2n)$, que es un múltiplo racional de π^{2n}. Se sabe que $\zeta(3)$ es irracional, pero no si es transcendente. No se sabe nada de $\zeta(2n + 1)$ para $n \geq 2$.

5. π Y EL AZAR

El número π tiene una extraña tendencia a aparecer por lugares insospechados, como en diversos problemas de probabilidad. Uno de los más conocidos es

5.1. **La aguja de Buffon.** En 1733, Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon, planteó el siguiente problema: dada una aguja de longitud *l* y una rejilla infinita de rectas paralelas a una distancia común *d*, hallar la probabilidad *p* de que la aguja, arrojada de forma aleatoria, corte a una de las rectas. Si $l \geq d$, se calcula fácilmente que

$$p = \frac{2l}{\pi d}$$

Esto permite calcular π de manera experimental, dibujando las líneas en el suelo y arrojando una aguja un número suficientemente grande de veces.

5.2. **Un método probabilístico de calcular π.** Junto con el método experimental de tirar una aguja al suelo, este es el más irracional de los métodos para calcular π. Partimos de un cuadrado de lado 1 en el que está inscrito un cuarto de círculo de radio también 1. Si tiramos N_TOTAL dardos a esa diana de manera aleatoria y N_ACIERTO caen en el círculo, entonces

$$\frac{\text{N\_ACIERTO}}{\text{N\_TOTAL}} \approx \frac{\text{área del cuadrado}}{\text{área del círculo}} = \frac{\pi}{4}.$$

Si el número de lanzamientos es muy grande, entonces podremos aproximar

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{\text{N\_ACIERTO}}{\text{N\_TOTAL}}.$$

Naturalmente no podemos tirar 100.000 dardos a la diana. Por eso se hace una simulación mediante números aleatorios. Los resultados de un experimento de 20.000 lanzamientos usando *Mathematica* son:

N	ACIERTOS	π
2.000	1.568	3,136
4.000	3.154	3,154
6.000	4.727	3,15133
8.000	6.303	3,1515
10.000	7.897	3,1588
12.000	9.450	3,15
14.000	10.993	3,14086
16.000	12.588	3,1395
18.000	14.098	3,13289
20.000	15.673	3,1346

5.3. **¿Es π normal?** Un número real *x* se dice que es normal en base *b* si en su representación decimal en base *b* todos los dígitos 0, 1,..., *b* – 1 aparecen asintóticamente el mismo número de veces. Además, para cada *n*, las b^n combinaciones de *n* dígitos deben aparecer asintóticamente con la misma frecuencia. Un número que es normal en todas las bases se dice que es normal.

Casi todos los números son normales, pero no se conoce explícitamente ninguno que lo sea. El número 0,12345678910111213141516171819202l... es normal en base 10 (D. Champernowne).

La aparente aleatoriedad de las cifras de π plantea la cuestión de si π es normal o no. Lo único que podemos hacer en esta dirección es un análisis estadístico de las cifras decimales conocidas de π. Esto fue realizado por David H. Bailey con 29.3600.000 cifras. En la siguiente tabla se ve la distribución de los dígitos del 0 al 9. La tercera columna se ha obtenido dividiendo la desviación de la media por la desviación estándar, y como cabría esperar de una sucesión aleatoria de dígitos, está distribuida normalmente con media cero y varianza 1.

DÍGITO	FRECUENCIA	Z-score
0	2.935.072	-0,5709
1	2.936.516	0,3714
2	2.936.843	0,5186
3	2.935.205	-0,4891
4	2.938.787	1,7145
5	2.936.197	0,1212
6	2.935.504	-0,3051
7	2.934.083	-0,1793
8	2.935.698	-0,1858
9	2.936.095	0,0584

Lo mismo sucede con las 100 posibles combinaciones de dos dígitos (del 00 al 99), las mil de tres dígitos, etcétera. Esto no quiere decir nada, pues la uniformidad puede romperse por ejemplo a partir de la cifra un trillón. De hecho, no sabemos si en el desarrollo decimal de π aparecen los dígitos del O al 9 infinitas veces. La sucesión de dígitos de π pasa todos los tests de aleatoriedad. Por ejemplo, si contamos el número de veces que cada uno de los dígitos aparece de una tacada *n* veces seguidas, se tiene el siguiente resultado:

	TACADA DE				
Dígito	5	6	7	8	9
0	308	29	3	0	0
1	281	21	1	0	0
2	272	23	0	0	0
3	266	26	5	0	0
4	296	40	6	1	0
5	292	30	4	0	0
6	316	33	3	0	0
7	315	37	6	2	1
8	295	36	3	0	0
9	306	40	7	0	0

Las frecuencias caen dentro de los límites de la aleatoriedad. Llama la atención la tacada de 9 sietes seguidos. Sin embargo, la probabilidad de que un dígito aparezca nueve veces seguidas en 29.360.000 dígitos aleatorios es del 29%, por lo que tampoco es de extrañar.

El Número PI

El número Pi es digno de admiración
tres coma uno cuatro uno
todas sus cifras siguientes también son iniciales
cinco nueve dos, porque nunca se termina.
No permite abarcarlo con la mirada seis cinco tres cinco
con un cálculo ocho nueve
con la imaginación siete nueve
o en broma, tres dos tres, es decir, por comparación
cuatro seis con cualquier otra cosa
dos seis cuatro tres en el mundo.
La más larga serpiente después de varios metros se interrumpe
Igualmente, aunque un poco más tarde, hacen las serpientes fabulosas.
El cortejo de cifras que forman el número Pi
No se detiene en el margen de un folio,
es capaz de prolongarse por la mesa, a través del aire,
a través del muro, de una hoja, del nido de un pájaro,
de las nubes, directamente al cielo
a través de la total hinchazón e inmensidad del cielo.
¡Oh, qué corta es la cola del cometa, como la de un ratón!
¡Qué frágil el rayo de la estrella que se encorva en cualquier espacio!
Pero aquí dos tres quince trescientos noventa
mi número de teléfono la talla de tu camisa
año mil novecientos setenta y tres sexto piso
número de habitantes sesenta y cinco céntimos
la medida de la cadera dos dedos la charada y el código
en la que mi ruiseñor vuela y canta
y pide un comportamiento tranquilo
también transcurren la tierra y el cielo
pero no el número Pi, este no,
él es todavía un buen cinco
no es un ocho cualquiera
ni el último siete
metiendo prisa, oh, metiendo prisa a la perezosa eternidad
para la permanencia.

Autora: *Wislawa Szymborska (Premio Nobel de Literatura, 1996).*

Traducción: *Fernando Presa González.*

(Extraído del diario EL PAÍS con fecha 4/10/96).