MATRICES Y DETERMINANTES

Las matrices aparecen por primera vez hacia el año 1850, introducidas por J.J. Sylvester. El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático W.R. Hamilton en 1853. En 1858, A. Cayley introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc...

La utilización de matrices (arrays) constituye actualmente una parte esencial dn los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas : hojas de cálculo, bases de datos,...

1. MATRICES

Una matriz A de orden m x n es un arreglo rectangular de números o funciones, de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{mxn}$$

Observaciones:

El número a_{ij}, representa el elemento de la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz A.

Ejemplo: Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

A es una matriz de orden 2 x 3

B es una matriz de orden 3 x 3

En la matriz A tenemos: a11 = 2 a12 = –1 a13 = 7; a21 = 3 ; a22 = 0; a23 = 5

ALGUNAS CLASES DE MATRICES

1) Atendiendo a la forma

a) Si A es una matriz de orden 1 x n se llama **matriz fila**

$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$, es una matriz de orden 1 x n

PARA USO EDUCATIVO

$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, es una matriz de orden 1 x 3

b) Si A es una matriz de orden m x 1 se llama **matriz columna**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$ es una matriz de orden m x 1

c) Si A es una matriz de n x n, con n filas y n columnas se llama **matriz cuadrada**. En una matriz cuadrada la diagonal principal es la línea formada por los elementos: a_{11}, a_{22} ,.... a_{nn}

Ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$, los elementos de la diagonal principal son 5, 2, 3.

d) Una matriz A, se llama **traspuesta de A**, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas. La primera fila de A es la primera columna de A^t, la segunda fila de A es la segunda columna de A^t, y así sucesivamente.

De la definición se deduce que si A es de orden m x n, entonces A^t es de orden n x m.

Ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

e) Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $A = A^t$, es decir, si $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall\ i, j$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow A = A^t$$

Observación: En una matriz simétrica, los elementos son simétricos respecto a la diagonal principal.

f) Una matriz cuadrada es **antisimétrica** si $A = -A^t$, es decir, si $a_{ij} = -a_{ji}$ $\forall\ i, j$

Ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (-1)B^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Observación

PARA USO EDUCATIVO

En una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal son siempre nulos (por qué?), y los restantes son opuestos respecto a dicha diagonal.

g) Una Matriz se llama **Ortogonal** si se verifica que: $A \cdot A^t = I$

Ejemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{B} ; \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{B^t} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{B \cdot B^t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Notas:

- La inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal.
- El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal.
- El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1.

2) Atendiendo a los elementos

a) Una matriz de orden m x n, con todos sus elementos iguales a cero, se llama **matriz nula**.

Ejemplo

A y B son matrices nulas. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Una matriz cuadrada, se llama **matriz diagonal** si todos sus elementos que no están en la diagonal principal son cero.

Ejemplo

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Una matriz se denomina **Matriz escalar,** si es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales

Ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \text{; donde } a \in R$$

d) Se denomina **Matriz unidad** o **identidad**, a una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1. También se suele decir que una matriz se llama **matriz identidad** a una matriz cuadrada, cuyos elementos de la diagonal principal son 1 y los otros elementos son todos cero.

Ejemplo

PARA USO EDUCATIVO

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Una matriz cuadrada se conoce como **triangular superior** (o inferior) si todos sus elementos por debajo (o arriba) de la diagonal principal son cero.

Ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, es una matriz triangular superior.

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$, es una matriz triangular inferior.

f) Una matriz se llama **involutiva** si se cumple: $A^2 = I$

Ejemplo 1

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Luego A es una matriz involutiva

Ejemplo 2

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Luego B es una matriz involutiva

2. TRASPOSICIÓN DE MATRICES

Dada una matriz de orden m x n, A = (a_{ij}), se llama matriz traspuesta de A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando las filas por las columnas (o viceversa) en la matriz A. Es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la trasposición de matrices

1. Dada una matriz A de orden m x n, siempre existe su traspuesta y además es única.

PARA USO EDUCATIVO

2. $(A^t)^t = A$.

Ejemplo

Encuentre las transpuestas de las matrices: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 \\ 3 & 4 & 50 \end{bmatrix}$

Solución

Las transpuestas de A y B son: $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -8 & 4 \\ 6 & 50 \end{bmatrix}$

3. ALGEBRA DE MATRICES

Igualdad de Matrices

Dos matrices *A* y *B* son iguales si y sólo si:

a) A y B tienen el mismo número de filas y columnas.

b) Todos los elementos correspondientes son iguales es decir:

$(a_{ij})_{mxn} = (b_{ij})_{mxn} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$; $\forall$ i, j

$$Si \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11} & a_{12} = b_{12} & a_{13} = b_{13} \\ a_{21} = b_{21}\ ; & a_{22} = b_{22}\ ; & a_{23} = b_{23} \\ a_{31} = b_{31} & a_{32} = b_{32} & a_{33} = b_{33} \end{cases}$$

Suma de Matrices

La suma de dos matrices *A* y *B* de orden m x n se define como la matriz

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{mxn}$$

es decir, sumar dos matrices del mismo orden, es sumar sus elementos correspondientes.

Ejemplo

La suma de: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$; es $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

Multiplicación de una Matriz por un Escalar

La multiplicación de un escalar k por una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$; se define mediante:
$kA = (ka_{ij})_{mxn}$, $k \in R$.

Propiedades

Sean *A*, *B* y *C* matrices de orden *m x n* y sea *k* un escalar entonces:

1. $A + 0 = A$

PARA USO EDUCATIVO

2. $A + B = B + A$

3. $(A + B) + C = A + (B + C)$

4. $k(A + B) = kA + kB$

5. $1 \cdot A = A \;,\; 1 \in R$

6. $0A = \theta$ (θ: matriz nula)

7. $(k + h)A = kA + hA$

Ejemplo

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{bmatrix}$. Calcular A - 2B:

Solución:

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & -5 \\ -14 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de Matrices

Sean $A = (a_{ij})_{mxn}$, y sea $B = (b_{ij})_{nxp}$

Entonces el producto de *A* y *B* es una matriz $C = (c_{ij})_{mxp}$, donde: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kj}$

Es decir: $c_{ij} =$ (fila *i* de *A*).(columna *j* de *B*)

Observación

El producto de AB = C; está definido sí el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de B; en este caso se dice que las matrices A y B son conformables.

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule AB y BA si es posible.

Solución:

a) A es una matriz de orden 2 x 2
B es una matriz de orden 2 x3 $\Rightarrow$ AB está definida y AB es una matriz de orden 2 x 3, dado por:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12 & -4+3 & 6+6 \\ 1+8 & -2+2 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de BA

Se tiene que B, es una matriz de orden 2 x 3

PARA USO EDUCATIVO

Mientras que A, es una matriz de orden 2 x 2, por lo tanto el producto de BA no está definido

Propiedades

1) Ley asociativa para la multiplicación de matrices.

Sea $A = (a_{ij})_{nxm}$, $B = (b_{ij})_{mxp}$ y $C = (c_{ij})_{pxq}$

Entonces:

A(BC) = (AB)C está definida

2) Leyes distributivas para la multiplicación de matrices.

Si todas las sumas y todos los productos siguientes están definidos, entonces:

A(*B* + *C*) = AB + AC

(*A* + B)C = *A*C + *B*C

3) Ley de la matriz identidad:

IA = A ; I es la matriz identidad.

4) El producto de matrices **en general no es conmutativo**

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{l}\underset{A}{\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}}\cdot\underset{B}{\begin{bmatrix}1 & 1\\5 & 3\end{bmatrix}}=\underset{AB}{\begin{bmatrix}11 & 7\\23 & 15\end{bmatrix}}\\ \underset{B}{\begin{bmatrix}1 & 1\\5 & 3\end{bmatrix}}\cdot\underset{A}{\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}}=\underset{BA}{\begin{bmatrix}4 & 6\\12 & 22\end{bmatrix}}\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix}11 & 7\\23 & 15\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}4 & 6\\12 & 22\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

Consecuencias de las propiedades

1) Si A·B = θ no implica que A = θ ó B = θ.

Ejemplo

Sean $A \neq \theta \wedge B \neq \theta$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\theta.$$

2) Si A·B = A·C no implica que B = C.

Ejemplo

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}}\cdot\underset{B}{\begin{bmatrix}0 & 0\\3 & 0\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\underset{A}{\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}}\cdot\underset{C}{\begin{bmatrix}0 & 0\\3 & -7\end{bmatrix}}\ de\ donde\ \underset{A}{\begin{bmatrix}0 & 0\\3 & 0\end{bmatrix}}\neq\underset{C}{\begin{bmatrix}0 & 0\\3 & -7\end{bmatrix}}$$

PARA USO EDUCATIVO

3) En general $(A + B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$, ya que $A·B \neq B·A$.

4) En general $(A + B)·(A – B) \neq A^2 – B^2$, ya que $A·B \neq B·A$.

4. MATRICES INVERSIBLES

Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es inversible o regular (donde el $|A| \neq 0$); en caso contrario recibe el nombre de singular (donde el $|A| = 0$).

Propiedades de la inversión de matrices

1. La matriz inversa, si existe, es única
2. $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4. $(A^{-1})^{-1} = A$
5. $(k \cdot A^{-1}) = \frac{1}{k}(A^{-1})$
6. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Observación

Podemos encontrar matrices que cumplen $A \cdot B = I$, y que $B \cdot A^{-1} = I$, en tal caso, podemos decir que A es la inversa de B "por la izquierda" o que B es la inversa de A "por la derecha".

Hay varios **métodos para calcular la matriz inversa** de una matriz dada (que veremos más adelante):

A. Directamente usando la resolución de un sistema de ecuaciones:

B. Usando determinantes

C. Por el método de Gauss-Jordan

5. DETERMINANTES

A toda matriz cuadrada *A* de orden n x n, le corresponde un número real llamado determinante de la matriz, que se denota por $\det(A)$ ó $|A|$

1) Determinante de orden uno

$$A = [a_{11}] \Rightarrow \det(A) = a_{11} ; \textit{ también se puede usar la notación } |a_{11}| = a_{11}$$

Ejemplo

$$|a_{11}| = a_{11} \Rightarrow |-3| = -3 \quad ; \quad |a_{11}| = a_{11} \Rightarrow |5| = 5$$

Nota

PARA USO EDUCATIVO

La notación $|a_{11}| = a_{11} \Rightarrow |-3| = -3$ no debe confundirse con el valor absoluto de un número.

2) Definición de un determinante para una matriz de orden 2x2

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ entonces $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Ejemplo

Hallar el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Solución

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ entonces: det (A) = (3)(5) – (4)(–2) = 15 + 8 = 23

Observación:

Los elementos a_{11} , a_{22}, constituyen la diagonal principal, mientras que los elementos a_{21} , a_{12}, constituyen la diagonal secundaria.

3) Definición de un Determinante para una matriz de orden 3x3

Sea una A matriz cuadrada de orden 3, el determinante de A se define:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Lo cual se puede recordar de modo fácil mediante la siguiente regla:

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

a la que se le llama **la Regla de Sarrus**.

Nota:

La regla de Sarrus sólo sirve para determinantes de orden 3x3. Para determinantes de mayor orden se usa la definición del menor complementario y cofactores, que veremos más adelante.

Ejemplos

a) Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

PARA USO EDUCATIVO

Solución

A la derecha del determinante dado agregamos las dos primeras columnas de modo que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{matrix} = 1(4)(2) + 2(1)(5) + (-1)(3)(0) - (5)(4)(-1) - (0)(1)(1) - 2(3)(2) =$$

$$= 8 + 10 + 0 + 20 - 0 - 12 = 26$$

b) Encuentre todos los valores de x para los cuales det (A) = 0

$$A = \begin{bmatrix} x-6 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 4 & x-4 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x-6 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 4 & x-4 \end{vmatrix} = (x-6)[(x)(x-4)+4] = (x-6)(x^2 - 4x + 4) =$$

$$= (x-6)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ ó } x = 2$$

Menor Complementario

Sea A una matriz de orden n x n, se llama menor (i, j) de *A* al determinante M_{ij} de la submatriz de $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene de *A*, al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de *A*.

Ejemplo.

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Encuentre M_{13} y M_{32}

Solución

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}, \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Cofactor.

Sea *A* una matriz de orden *n x n*. El cofactor de (i, j) de *A*, denotado por A_{ij} es:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

PARA USO EDUCATIVO

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1; & \text{si, } i+j \text{ es par} \\ -1; & \text{si, } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

El signo de cada cofactor está configurado de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Calcule el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}|M_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|M_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}|M_{13}|$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot |M_{11}| - a_{12} \cdot |M_{12}| + a_{13} \cdot |M_{13}|$$

$$\det A = (2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2(5-8) - 1(5-10) + (-3)(4-5) = 2$$

Cálculo de un determinante por los adjuntos de una línea

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno cualquiera de sus elementos. Si se suprime la fila i y la columna j de la matriz A se obtiene una submatriz M_{ij} que recibe el nombre de **matriz complementaria del elemento** a_{ij}.

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

la matriz complementaria del elemento a_{11} es la matriz que resulta de suprimir en la matriz A la fila 1 y la columna 1; es decir:

PARA USO EDUCATIVO

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Llamamos **menor complementario** del elemento a_{ij} al determinante de la matriz complementaria del elemento a_{ij} , y se representa por a_{ij}

Se llama **adjunto de** a_{ij} , y se representa por por **A$_{ij}$**, al número $(-1)^{i+j} a_{ij}$.

Observación

- El signo es + si i+j es par, en $(-1)^{i+j} a_{ij}$
- El signo es - si i+j es impar, $(-1)^{i+j} a_{ij}$

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

a) El **menor complementario del elemento** a_{21} de A es, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ = (3)(5) – (2)(4) = 7, este determinante es el de la submatriz A, obtenida al quitarles la segunda fila y la primera columna.

b) El **adjunto del elemento** a_{21} de A es: $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(7) = -7$

CONCLUSIÓN:

El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera, multiplicados por sus adjuntos.

Por ejemplo, si desarrollamos un determinante de orden *n* por los adjuntos de la 1ª fila se tiene:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1j}$$

La demostración es muy fácil, basta con aplicar la definición de determinante a ambos lados de la igualdad.

Ejemplo

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots \end{vmatrix}$$

De modo particular, calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución

PARA USO EDUCATIVO

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&1&2\\4&2&5\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A)=2\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&2\\4&5\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1&1\\4&2\end{bmatrix}=$$

$$=2(1x5-2x2)-3(1x5-4x2)+4(1x2-4x1)$$
$$=2(1)-3(5-8)+4(2-4)=2+9-8=3$$

Por lo tanto se tiene: Si $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&1&2\\4&2&5\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A)=3$

6. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Los determinantes tienen muchas propiedades que facilitan los cálculos.

1) Si todos los elementos de una fila (o columna) de una matriz son ceros, entonces su determinante es igual a cero.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix}3&0&-1\\5&0&2\\6&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}3&0&-1\\5&0&2\\6&0&3\end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{bmatrix}0&0\\2&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}0&0\\2&3\end{vmatrix}=0$$

2) El determinante de una matriz A y el de su transpuesta (A^t) son iguales.

Ejemplo

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\3&4&7\\1&2&6\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&4&2\\4&7&6\end{bmatrix};\ luego\ \det(A)=-5=\det(A^t)$$

3) Si se intercambian dos filas (o columnas) de una matriz, entonces el determinante cambia de signo.

Ejemplos

$\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&1&0\\2&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{C_{13}}\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\1&2&2\end{bmatrix}$; C_{13} :Indica el intercambio de las columnas 1 y 3;

Calculando el valor de los determinantes de la matriz se tiene:

$$\begin{vmatrix}1&-2&1\\-2&1&0\\2&2&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}-(-2)\begin{bmatrix}-2&0\\2&1\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}-2&1\\2&2\end{bmatrix}=$$

$$=1\cdot(1x1-2x0)+2(-2x1-2x0)+1\cdot(-2x2-2x1)$$
$$=1-4-6=-9$$

PARA USO EDUCATIVO

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (1x2 - 2x(-2)) + 2(0x1 - 1x(-2)) + 1 \cdot (0x2 - 1x1)$$

$$= 6 + 4 - 1 = 9$$

Como observamos al intercambiar dos columnas en la matriz el valor del determinante cambia de signo.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = B \ ;$$

F_{12}: Indica el intercambio de las filas 1 y 2; en este caso también se tiene que el det (A) = - det(B) ; (el valor absoluto de los determinantes es el mismo y se diferencian en el signo solamente) .

4) Si una matriz tiene dos filas (o columnas) iguales, entonces su determinante es igual a cero.

Ejemplo

$$Si \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (5x3 - 2x6) - 2 \cdot (4x3 - 1x6) + 3 \cdot (4x2 - 1x5) = 3 - 12 + 9 = 0$$

5) Si una fila (o columna) de una matriz es un múltiplo constante de otra fila (o columna), entonces su determinante es cero.

Ejemplo

$$Si: A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 10 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 10 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$Si: A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

6) Si un múltiplo de una fila (o columna) de una matriz se suma a otra fila (o columna) de la matriz, entonces el determinante no varía.

Ejemplo

$$Si \ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(-3)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = B \Rightarrow \det(A) = \det(B) = -21$$

7) Cualquier número real k, y para cualquier matriz A de orden n x n, se cumple que:

PARA USO EDUCATIVO

$\det(kA) = k^n \det(A)$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3$; y sea $5A = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 5 & 5 & 10 \\ 20 & 10 & 25 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(5A) = 375$

Ahora aplicando la propiedad tenemos:

Ahora: 5^3 x det(A) = 125(3) = 375

Por lo tanto: 5^3 x det(A) = det(5A)

8) Un determinante **triangular** es igual al **producto de los elementos de la diagonal principal.**

$$Si\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (2)(-4)(5) = -40$$

9) Si A es una matriz regular (invertible) entonces se cumple: $Si\ \left| A^{-1} \right| = \dfrac{1}{|A|}$

Ejemplo

Sea

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ (A^{-1}) = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1/2 & -1 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left| A^{-1} \right| = -1/2 = \frac{1}{-2} = \frac{1}{|A|}$$

10) Si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a+b & c+d & e+f \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a & c & e \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ b & d & f \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Sea $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 10 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 136 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 119 + 17 = 1`36$

11) El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

$$\left| A \cdot B \right| = |A| \cdot |B|$$

PARA USO EDUCATIVO

Ejemplo

$$Sea \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & -2 & 5 \end{bmatrix} \; y \; Sea \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 8 & -2 & 4 \end{bmatrix} \; \Rightarrow \; A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Aquí se tiene que:

det (AB) = - 1110 y det(A) = 111 ; det (B) = - 10

Por tanto: det (A B) = -1110 = det (A) det (B) =111 x -10

Cálculo de determinantes por el método de Gauss

Se conoce cómo método de Gauss a un método para facilitar el cálculo de determinantes usando las propiedades de éstos. Dicho método consiste en hallar un determinante equivalente (con el mismo valor) al que se pretende calcular, pero triangular. La estrategia a tener en cuenta en el caso de determinantes de orden 3 o mayores que 3, consiste en “hacer ceros” puesto que el valor del determinante no varía al realizar ciertas transformaciones elementales en filas como nos indican las propiedades antes estudiadas. De manera que la mejor forma de calcular un determinante por el método de Gauss es hacer ceros en una fila o columna que nos ayude a simplificar el cálculo del determinante. De esta forma el problema se reduce a calcular un determinante de una matriz triangular, cosa que es bastante fácil usando las propiedades de los determinantes.

Para conseguir triangularizar el determinante se pueden aplicar las siguientes operaciones:

- Permutar 2 filas ó 2 columnas.
- Multiplicar o dividir una línea por un número no nulo.
- Sumarle o restarle a una línea otra paralela multiplicada por un número no nulo.

Ejemplo

Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \end{bmatrix}$; para facilitar el trabajo intercambiamos la fila 2 con la fila 1; luego tenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \; por \; F_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[-3F_1+F_4]{-2F_1+F_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 11 \\ 0 & -11 & -14 & 16 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 11 \\ 0 & -11 & -14 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[11F_2+F_4]{2F_2+F_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -17 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{-8}{3}F_3+F_4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-91}{3} \end{vmatrix}$$

Entonces el $\det(A) = (1)(1)(3)(\frac{-91}{3}) = -91$

PARA USO EDUCATIVO

7. OPERACIONES ELEMENTALES DE FILA

Una operación elemental de fila en una matriz *A* es cualquiera de los tres tipos de operaciones siguientes:

1) Intercambiar las filas i por j: $F_i \rightarrow F_j$

2) Multiplicar la fila i por un número "c" diferente de cero: $F_i(c)$

3) Multiplicación de la fila i por $c \neq 0$ y sumar el resultado a la fila j: $F_i(c) + F_j$

Observación:
Combinando estas tres operaciones adecuadamente hallaremos fácilmente el rango de una matriz; la inversa de una matriz o resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Forma Reducida de Gauss

Cualquier matriz A de orden m x n puede ser reducida a una matriz más simple, A' mediante un número finito de operaciones elementales de fila; donde se cumplen las cuatro condiciones siguientes:

1) Todas las filas nulas de aparecen en la parte inferior de la matriz.

2) Para cada fila no nula, el primer elemento no nulo es 1 (denominado 1 principal).

3) Para dos filas consecutivas no nulas, el 1 principal de la fila superior está más a la izquierda que el 1 principal de la fila inferior.

4) Toda columna con un 1 principal tiene ceros en todas las posiciones por debajo de su 1 principal.

Ejemplo

Las matrices A y B están en su forma reducida de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. RANGO DE UNA MATRIZ

El rango de una matriz A, es igual al número de filas no nulas en su forma reducida de Gauss; se denota por r(A).

Ejemplo

Determinar el rango de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución

Expresando *A* y *B* en su forma reducida de Gauss.

PARA USO EDUCATIVO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1(-5)+F_3]{F_1(-2)+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(3)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3\left(\frac{2}{11}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces r(A) = 3.
B en su forma reducida de Gauss, tiene la forma *B'*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1(-2)+F_3]{F_1(-4)+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 11 \\ 0 & -11 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-1)+F_3,\ F_2(-\frac{1}{11})} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B',$$

Entonces, el rango de B, se expresa por: r(B)=2.

CÁLCULO DEL RANGO USANDO DETERMINANTES

Observación:

Si consideramos a las filas y columnas de una matriz, como vectores, podemos afirmar entonces que esta formada por vectores fila o vectores columna. (Recordar que las Matrices forman espacios vectoriales, que por no ser tema del presente no lo tocamos detalladamente aquí); Son necesarias las siguientes definiciones:

Combinación Lineal: Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y dos números reales α y β. El vector $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, se dice que es una combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Vectores Linealmente Dependientes:

Varios **Vectores** (filas o columnas) de una matriz se dice que son **linealmente Dependientes**, si existe una **Combinación Lineal** de ellos que es igual a la matriz nula, si que sean ceros los coeficientes de la **Combinación Lineal.**

Es decir: $\vec{0} = \alpha_1 \cdot \vec{b_1} + \alpha_2 \cdot \vec{b_2} + \alpha_3 \cdot \vec{b_3} + ... + \alpha_n \cdot \vec{b_n}$

Vectores Linealmente Independientes:

Varios **Vectores** (filas o columnas) de una matriz se dice que son **linealmente Independientes**, si ninguno de ellos puede ser escrito como una **Combinación Lineal** de los restantes.

Es decir:

Si: $\vec{0} = \alpha_1 \cdot \vec{b_1} + \alpha_2 \cdot \vec{b_2} + \alpha_3 \cdot \vec{b_3} + ... + \alpha_n \cdot \vec{b_n}$ y se cumple que: $0 = \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$,

entonces se dice que los vectores (filas o columnas) $\vec{b_1}$, $\vec{b_2} \cdot \vec{b_3}$, ... , $\vec{b_n}$ son **linealmente Independientes**

PARA USO EDUCATIVO

Rango de una matriz: esta determinado por el número e filas o columnas linealmente independientes**.**

Ejemplo 1

Calcular el rango de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & -13 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

Solución

Puesto que A, es una matriz de 3 filas por 4 columnas, entonces el determinante sólo puede ser un determinante de orden 3, es decir de 3 filas y 3 columnas. Esto quiere decir que el rango máximo podría ser 3.

Para ello analicemos primeramente un menor cualquiera que se forme de la matriz dada, de orden 2, es decir de 2 filas y 2 columnas, hallamos su determinante:

a) Si nos da distinto de cero, el rango sería como mínimo 2.
b) Si nos da cero, probamos con otros menores de orden 2, hasta encontrar uno que sea distinto de cero.
c) Si no hay ninguno que sea diferente de cero, el rango sería uno.

Tomamos el determinante del menor: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (6)(2) = 1 - 8 = -7 \neq 0$,

esto indica que las filas 1 y 2 son linealmente independientes.

O sea: $\vec{0} = \alpha_1 \cdot \vec{b}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{b}_2$ y se cumple que: $0 = \alpha_1 = \alpha_2$,, entonces
$(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) = \alpha_1 (1 \quad 2 \quad 3 \quad -1) + \alpha_2 (6 \quad -1 \quad 10 \quad 0)$
De donde se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = \alpha_1 + 6\alpha_2 \\ 0 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ 0 = 3\alpha_1 + 10\alpha_2 \\ 0 = -\alpha_1 + 0\alpha_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \textit{de la ultima ecuación se tiene } \alpha_1 = 0 \\ \textit{y en cualquier ecuación se tiene } \alpha_2 = 0 \end{array}$$

Situación que verifica que las filas 1 y 2 son Linealmente independientes.

Ahora veamos si la matriz A tiene rango 3

Para ello **orlamos**. Orlar un menor es formar una menor de orden una unidad superior tomando una fila y una columna más de las que forman el menor inicial.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 6 & -1 & \mathbf{10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-13} & \mathbf{-8} \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -13 & -8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 0 & -13 \end{vmatrix} = 8 + 130 + 96 - 234 = 0$$

PARA USO EDUCATIVO

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -\mathbf{1} \\ 6 & -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{13} & \mathbf{6} \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -13 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 0 & -13 \end{vmatrix} = -6 - 72 + 78 = 0$$

Como vemos los dos determinantes que hemos orlado de orden 3, nos dan cero. Por tanto el rango es 2.

Esta circunstancia determina que la fila 3, es dependiente de las filas 1 y 2, situación que se verifica mediante: $F_3 = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$. Esto es:

$$F_3 = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 \Rightarrow (0 \quad -13 \quad -8) = \alpha_1 (1 \quad 2 \quad 3) + \alpha_2 (6 \quad -1 \quad 10)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -8 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha_1 (1) + \alpha_2 (6) \\ -13 = \alpha_1 (2) + \alpha_2 (-1) \\ -8 = \alpha_1 (3) + \alpha_2 (10) \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -6 \wedge \alpha_2 = 1$$

Por lo tanto:

$$F_3 = -6F_1 + F_2 .$$

Nota: Esta situación nos confirma pues que la Fila 3 es dependiente de las Filas 1 y 2.

Ejemplo 2

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Solución

Se trata de una Matriz de orden 3, es decir de tres filas y 3 columnas, entonces el rango máximo es 3.

Empezamos tomando el menor: $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$. Hallamos su determinante y observamos que: $\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (1)(1) = -1 - 1 = -2 \neq 0$. Por lo tanto el rango mínimo es 2. Orlamos este menor de manera que se tiene:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{5} \\ 1 & -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$, luego calculamos $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{5} \\ 1 & -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = 16 \neq 0$, por tanto el rango es 3.

Esto nos indica que las tres filas y las tres columnas de la matriz A son linealmente independientes.

9. APLICACIONES DE MATRICES Y DETERMINANTES

9.1 Solución de Sistemas de Ecuaciones

Un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas se escribe de la forma:

PARA USO EDUCATIVO

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

sí:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema (1).

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ matriz de variables; $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ matriz de los términos independientes

entonces el sistema (1) puede escribirse en forma matricial como:

$$\boxed{Ax = b}$$

MATRIZ AUMENTADA

A la matriz $\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] = [A|b]$

se le llama matriz aumentada o ampliada del sistema (1)

Se resuelve el sistema (1) estudiando la matriz aumentada y reduciendo por filas a su forma reducida (método denominado triangulación de Gauss o eliminación Gaussiana).

Las siguientes condiciones nos permitirán conocer que tipos de soluciones tiene el sistema:

Ax = b

1) Si **r(A|b) > r(A)**, entonces el sistema no tiene solución.

2) Si **r(A|b) = r(A) = n** (número de variables), entonces el sistema tiene una única solución.

3) Si **r(A|b) = r(A) < n** (número de variables), entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplo

Determinar la solución del siguiente sistema

PARA USO EDUCATIVO

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 9 \end{cases}$$

Solución

Reduciendo la matriz aumentada $\left[A \mid b\right]$ a su forma escalonada, determinamos si el sistema tiene soluciones.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{F_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{F_1(-2)+F_2 \\ F_1(-5)+F_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2\left(1/2\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 9/2 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2(3)+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 11/2 & 55/2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3\left(\frac{2}{11}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Por lo tanto: $r\left[A\right] = r\left[A \mid b\right] = 3$ = n (número de variables).

Luego: El sistema tiene solución única.

La solución del sistema es: $x_1 = 10;\ x_2 = -3;\ x_3 = 5$; la que se obtiene directamente de la última matriz reducida.

Ejemplo

Determine que tipo de solución tiene el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{F_1(-2)+F_2 \\ F_1(-1)+F_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2(-1)+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De donde $r(A) = r(A|0) = 2 < 3$ (número de variables), entonces el sistema tiene un número infinito de soluciones

9.2 CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA A

La inversa de una matriz si existe, se denotará por A^{-1}. Para su cálculo se aplica a la matriz $\left[A \mid I\right]$, operaciones elementales de fila hasta obtener la matriz $\left[I \mid B\right]$, entonces $B = A^{-1}$; donde, **I** es la matriz identidad.

PARA USO EDUCATIVO

Observación:

Una matriz cuadrada *A* tiene inversa si y sólo si $\det(A) \neq 0$

- Si $\det(A) \neq 0$, se dice que A es no singular.
- Si $\det(A) = 0$, entonces A es singular.

A. Directamente usando la resolución de un sistema de ecuaciones:

Ejemplo

Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, si existe.

Solución

Sabemos que $A \cdot A^{-1} = I$, entonces buscamos A^{-1}, mediante:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A \cdot A^t \quad = \ I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2a - c &= 1 \\ 2b - d &= 0 \\ a + c &= 0 \\ b + d &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 1/3 \\ b &= 1/3 \\ c &= -1/3 \\ d &= 2/3 \end{aligned} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Nota

La matriz que se ha calculado realmente sería la inversa por la "derecha", pero es fácil comprobar que también cumple $A^{-1} \cdot A = I$, con lo cual verificamos que es realmente la inversa de A.

B. Por el método de Gauss – Jordan

Como una aplicación de las operaciones fila elementales tenemos aquí, el cálculo de la matriz inversa. El método de Gauss-Jordan para calcular la matriz inversa de una matriz dada se basa en una triangularización superior y luego otra inferior de la matriz a la cual se le quiere calcular la inversa.

Ejemplo 1

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1} si existe.

Solución

Usemos el procedimiento para calcular la inversa de una matriz cuadrada A.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1(-3)+F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2\left(1/4\right)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

PARA USO EDUCATIVO

Aplicando el método de Gauss-Jordan a la matriz $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$. Calcular la matriz inversa de A.

Solución

En primer lugar triangularizamos inferiormente:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{3F_2-F_1}\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -1 & 3\end{array}\right]$$

Una vez que hemos triangularizado superiormente lo hacemos inferiormente:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -1 & 3\end{array}\right]\xrightarrow{5F_1-F_2}\left[\begin{array}{cc|cc}15 & 0 & 6 & -3\\ 0 & 10 & -1 & 3\end{array}\right]$$

Por último, habrá que convertir la matriz diagonal en la matriz identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}15 & 2 & 6 & -3\\ 0 & 10 & -1 & 3\end{array}\right]\xrightarrow{(\frac{1}{15})F_1\ ;\ (\frac{1}{10})F_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 6/15 & -3/15\\ 0 & 1 & -1/10 & 3/10\end{array}\right]$$

De donde, la matriz inversa de A es $A^{-1}=\begin{bmatrix}6/15 & -3/15\\ -1/10 & 3/10\end{bmatrix}$

C. Cálculo de la matriz inversa usando determinantes

Dada una matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A, y se representa por Adj(A), a la matriz de los adjuntos, Adj(A) = (A_{ij}).

Ejemplo

Si tenemos una matriz tal que det (A) ≠ 0, se verifica:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\left[\mathrm{Adj}(A)\right]^t$$

Esto es fácil probarlo puesto que sabemos que la suma de los productos de los elementos de una fila por sus adjuntos es el valor del determinante, y que la suma de los productos de los elementos de una fila por los adjuntos de otra fila diferente es 0 (esto sería el desarrollo de un determinante que tiene dos filas iguales por los adjuntos de una de ellas).

Ejemplo

1) Sea $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 10\end{bmatrix}$, calcule A^{-1} si existe.

Solución

$$\det(A)=10-8=2\neq 0 \Rightarrow \text{existe } A^{-1}.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}10 & -4\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -1 & 1/2\end{bmatrix}$$

PARA USO EDUCATIVO

10. REGLA DE CRAMER

Si Ax = b es un sistema de n ecuaciones con n variables, tal que $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene solución única.

Esta solución es:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}; \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, \; x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Donde A_j es la matriz que se obtiene al reemplazar los elementos de la j-ésima columna de *A* por los elementos de la matriz:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Usando la regla de Cramer resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -5 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Solución

$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ matriz de coeficientes; $b = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ matriz columna de los términos independientes

det (A) = 11 $\neq$ 0 $\Rightarrow$ el sistema tiene solución única.

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 22$$

Por lo tanto: $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{11}{11} = 1; \quad x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{22}{11} = 2$

Luego:

El conjunto solución es: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

MATRICES EN BLOQUES

Sean A, B,C, D matrices n x n, n x m, m x n, m x m respectivamente. Entonces:

$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det\,(A)\,\det(D)$. Esto se puede ver de la formula de Leibiniz.

PARA USO EDUCATIVO

Empleando la siguiente identidad: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1} \\ 0 & D - C\,A^{-1}B \end{bmatrix}$

Vemos que para una matriz general se tiene: $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det\,(A)\,\det\,(D - CA^{-1}B)$

Análogamente, se puede obtener una identidad similar con det (D) factorizando.

Si $d_{i\,j}$ son matrices diagonales,

$$\det \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1c} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \cdots & d_{rc} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \det(d_{11}) & \cdots & \det(d_{1c}) \\ \vdots & & \vdots \\ \det(d_{r1}) & \cdots & \det(d_{rc}) \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS

1. Si **A** es de orden 2 x 5, entonces el orden de 4**A** – 5**A**, es:

a) 2 x 5 **b)** 4 x 5 **c)** 3 x 5 **d)** 5 x 2 **e)** 5 x 3

2. Si en la matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{a}{3} & \frac{2-b}{5} \\ \frac{b-4}{3} & \frac{a}{4}+2 \end{bmatrix}$; se verifica que: $a_{11} = 4$; $a_{21} = 1$; entonces el valor de $E = a_{12} + a_{22}$

a) 4 **b)** 2 **c)** 3 **d)** –5 **e)** –3

3. Sean las matrices:

$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-1 & 5b \\ 7c+2 & 4d \end{bmatrix}$

la suma de las variables es:

a) 3 **b)** $\frac{699}{640}$ **c)** $\frac{699}{140}$ **d)** 0 **e)** 8

4. Determinar (x·y) de modo que se tenga: $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$

a) 3 **b)** 0 **c)** 8 **d)** 15 **e)** –6

5. Dadas las matrices A, B. ¿Cuáles de las siguientes condiciones debe de cumplirse para que se verifique: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

I) $A = A^t$

II) $(A + B) = (A+B)^t$

PARA USO EDUCATIVO

III) $A^2 = B$

IV) AB = BA

V) A y B tengan el mismo orden.

a) **II** y **III** **b)** **I** y **IV** **c)** **IV** y **V** **d)** **I, II, IV** y **V** **e)** Sólo **V**

6. Sea A matriz de orden 2, tal que:

$A = [a_{ij}]$, donde $a_{ij} = 2^i - (-1)^j$ y además: $A^t = \begin{bmatrix} x-2y & 5 \\ 2x+y & -2y+x \end{bmatrix}$; luego el valor de y, es:

a) –1 **b)** 0 **c)** 2 **d)** 1 **e)** –2

7. La suma de los elementos de la segunda fila de la matriz X, si se tiene la ecuación:

$X + \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -12 & 8 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; es:

a) 8 **b)** 34 **c)** –11 **d)** –8 **e)** –7

8. En el problema anterior hallar la suma de los elementos de 2X.

a) 14 **b)** 16 **c)** 24 **d)** 104 **e)** 60

9. Dadas las matrices A, B y θ la matriz nula. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?.

a) $0A = \theta$

b) $AB = \theta$ entonces $A = \theta$ ó $B = \theta$

c) **I**A = A

d) $(AB)^t = B^t A^t$

e) (A + B)C = AC + BC

10. Sean la matrices:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix}$; si A y B son matrices conmutables, el valor de "m + n" es:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

11. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Al resolver el sistema: $\begin{cases} X + Y = 3A \\ X - Y = 2B \end{cases}$. El producto de los elementos de la diagonal principal de X e Y vale:

a) 72 **b)** 144 **c)** 288 **d)** 256 **e)** 0

12. Dadas las matrices A y B:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

El producto de los elementos de la diagonal secundaria de A x B es:

a) 0 **b)** 134 **c)** –52 **d)** –134 **e)** 52

13. Si la matriz, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, calcular $A \cdot A = A^2$

a) 2A **b)** **I** **c)** 2**I** **d)** A **e)** 3**I**

PARA USO EDUCATIVO

14. El elemento a_{22} de A^4, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ es:

a) 116 **b)** 48 **c)** 81 **d)** 243 **e)** 120

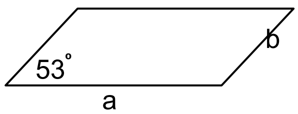
15. Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ entonces la suma de los elementos de la primera fila de A^t es:

a) 0 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 6 **e)** 1

16. Si $B_{3x3} = \lfloor b_{ij} \rfloor$ donde $b_{ij} = \min\{i, j\}$ entonces se afirma que:

a) B = **I** (**I** = matriz identidad)
b) $B = B^t$
c) $B = -B^t$
d) Tr(B) = 5
e) B es una matriz diagonal.

17. Si M es una matriz triangular inferior $M = \begin{bmatrix} b-2 & a-(b+2) & b-10 \\ b-5 & 2 & 0 \\ a-(b+1) & 0 & 5 \end{bmatrix}$ hallar el área del paralelogramo siguiente:



a) 24 u^2 **b)** 12 u^2 **c)** 48 u^2 **d)** 96 u^2 **e)** 120 u^2

18. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, sabiendo que **I** es la matriz identidad. ¿A qué es igual A^2?.

a) 3A + **I** **b)** 2A − **I** **c)** 3**I** −A
d) A + 2**I** **e)** 2A + **I**

19. Cuál es la matriz X = $\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ si se sabe que X + $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ = **I**

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$.¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I) AB = BA
II) A+ B = B + A
III) $B^tA = B$

a) I y **III** **b) II** y **III** **c) I** y **II**
d) I, II y **III** **e)** Sólo **I**

21. Sean A y B dos matrices no nulas, entonces la siguiente igualdad: (A + B)(A − B) = $A^2 - B^2$, solamente es verdadera si:

PARA USO EDUCATIVO

a) A y B son matrices cuadradas.

b) A = B

c) A = –B

d) A es la inversa de B.

e) A y B son matrices conformables conmutativas.

22.¿Cuántas de las afirmaciones que se dan son correctas?:

I) det (A) = det (A^t)

II) $A \cdot A^{-1} = \mathbf{I}$

III) La suma de matrices es asociativa.

IV) El producto de matrices es conmutativo.

a) 0 **b)**1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

23. Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; además si f(X) = X g(X) = **I**. Luego: $\frac{1}{2}\left[f(A) + g(A)\right]$ es una matriz:

a) Triangular inferior.

b) Diagonal

c) Identidad

d) Escalar

e) Cuya primera fila es [1 1].

24. La traza de la matriz $A = (a_{ij})_{3x3} \ / \ a_{ij} = (-2)^{i-j}$; es:

a) 1 **b)** 3 **c)** –6 **d)** –1 **e)** 6

25.¿Para que valores de "a" la matriz $\begin{bmatrix} a & -3 \\ 4 & 1-a \end{bmatrix}$; tiene determinante cero?.

a) {4, 2} **b)** {4, –3} **c)**1, –3} **d)** {–3, –3} **e)** {–4, 3}

26. Calcular la suma de los valores de t, tales que: $\begin{vmatrix} t-4 & 7 \\ 1 & t+2 \end{vmatrix} = 0$

a) 2 **b)** –2 **c)** –3 d) 8 **e)** –8

27. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ el determinante de AB es:

a) –2 **b)** 2 **c)** 0 **d)** 1 **e)** –1

28. El determinante de B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es:

a) –1 **b)** 1 **c)** 0 **d)** 2 **e)** 3

PARA USO EDUCATIVO

29. Sean las matrices: $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; $N = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 4 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$;

Si A = M – N, el det(A) es:

a) 1 **b)** 2 **c)** 0 **d)** $10 - \sqrt{2}$ **e)** $\sqrt{2} - 4$

30. Si B es una matriz que se obtiene de $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ intercambiando sus fi-las, entonces:

a) $|A| = |B|$ **b)** $|A| = -|B|$ **c)** $|A| = 2|B|$ **d)** $|A| - |B| = 0$

e) $|A| + 1 = |B|$

31. Siendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, cuyo determinante es m; entonces det(A^{-1}) es:

a) –2m **b)** 2m **c)** 1 **d)** –1/m **e)** 1/m

32. Si $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$; entonces al resolver la ecuación siguiente:

3(X – 2A) = B; ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I) X es una matriz que tiene inversa

II) X = A + B

III) X es matriz triangular superior.

a) VFF **b)** FFF **c)** VVV **d)** VFV **e)** FVF

33. Hallar el valor del polinomio f(A) de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; si $f(X) = x^2 - 3x + 1$

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

34. Si la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 2 & 5 & a \\ b & x & 3 \end{bmatrix}$ es simétrica; su determinante es:

a) –2 **b)** –4 **c)** –6 **d)** –3 **e)** –1

35. Qué valor positivo de x, soluciona la ecuación: $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 3 & x & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10$

a) 2 **b)** –8 **c)** 6 **d)** 0 **e)** 8

36. Si $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $V = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ y además f(a, b) = 2a – 3b. Entonces el valor de f(T, V) es:

PARA USO EDUCATIVO

a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} -4 & -14 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$

37. En la matriz $X = [a_{ij}]$, de la ecuación: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;la suma de todos los $[a_{ij}]$, es:

a) 0 **b)** 13 **c)** 1 **d)** 3 **e)** 10

38. Determine si existe la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ luego la traza de A^{-1}; es:

a) 1 **b)** –1 **c)** 0 **d)** $\frac{11}{6}$ **e)** $\frac{6}{11}$

39. Dadas las matrices A y B tales que:

$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. La suma de los elementos de A·B, es:

a) 12 **b)** –5 **c)** –12 **d)** 0 **e)** 5

40. Determine para que valores de x, la matriz $\begin{bmatrix} x-4 & 8 \\ 3 & x-2 \end{bmatrix}$ es singular.

a) 8 y –2 **b)** –2 y 6 **c)** 8 y 1 **d)** 6 y 2 **e)** –8 y –2

41. Encuentre un valor o valores de k, si es que existe, tal que el sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 15x + ky = 20 \end{cases}$; tenga precisamente una solución:

a) k = 10 **b)** k = –10 **c)** $k \neq 10$ **d)** $k \neq -10$ **e)** k = –1

42. Sea $A = \begin{bmatrix} 2^x & 1 \\ 5 & 4^x \end{bmatrix}$ una matriz tal que Tr(A) = 72, entonces el valor de x es:

a) 3 **b)** –3 **c)** –2 **d)** 2 **e)** –9

43. Si A y B son dos matrices de orden 2x2 tales que det(A) = 5 y det(B) = 7**.**

Calcular det (2A x B)

a) **35** b) **70** c) **140** d) **120** e) –**70**

44. Hallar el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2x & -2 \\ 3 & 2x-2 & 1 \end{vmatrix}$

PARA USO EDUCATIVO

a) 0 **b)** 2x **c)** x – 1 **d)** 8 **e)** 4x

45. Hallar el valor de m en: $\begin{vmatrix} f(x) & 5 \\ 1 & g(x) \end{vmatrix} = m + 5$; en x = 2; si $f(x) = x^2 + 2x + 1$; y $g(x) = x^3 - 1$.

a) 1 **b)** 5 **c)** 53 **d)** –25 **e)** –2

46. Sean $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, y E = A + 2A + 3A + … + n A; con, $n \in$ **N;** entonces la suma de los elementos de E, es:

a) 0 **b)** 1 **c)** n(n + 1) **d)** 2n(n + 1) **e)** 2n(n – 1)

47. Sea la matriz $H = \begin{bmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{bmatrix}$; tal que det (H) = 4; luego H^2; puede ser:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

48. Sea A una matriz de orden 7 tal que $|A^{-3}| = 64$; luego el valor de $|A^2|$ es:

a) 16 **b)** 4 **c)** 8 **d)** $\frac{1}{16}$ **e)** $\frac{1}{4}$

49. ¿Para qué valor de "b" el sistema dado es incompatible?

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + ay = b \end{cases}$$

a) b = –2 **b)** b = –4 **c)** b = 4 **d)** $b \neq 4$ **e)** $b \neq 2$

50. ¿Cuál es la suma de los valores x, y, z al resolver el sistema.

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y + 3z = 9 \end{cases}$$

a) 0 **b)** 1 **c)** –4 **d)** 3 **e)** 4

PARA USO EDUCATIVO

PARA USO EDUCATIVO