LA CIRCUNFERENCIA EN EL PLANO CARTESIANO

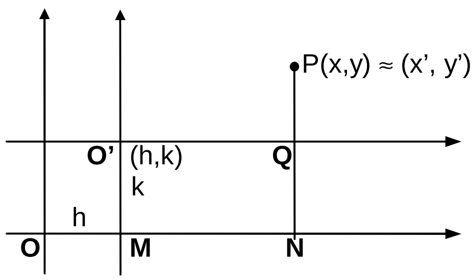
"Si un hombre es perseverante, aunque sea duro de entendimiento se hará inteligente; y aunque sea débil se transformará en fuerte"
Leonardo Da Vinci

TRASLACION DE EJES

En el estudio de las cónicas a veces es conveniente "mover" los ejes cartesianos para que la curva que estamos estudiando quede en una posición más "fácil" y su ecuación sea más simple. Los movimientos que se pueden hacer con los ejes cartesianos son de dos tipos: **traslaciones** y **rotaciones** ya que estos movimientos no alteran las distancias entre puntos ni los ángulos entre rectas; a este proceso de cambiar de un par de ejes a otro se le llama **transformación de coordenadas**.

Consideremos un sistema coordenado en el plano cartesiano. Tomemos un punto **O'** (x_o , y_o) distinto del origen, tracemos un nuevo par de ejes cartesianos **X'** y **Y'** con origen **O'** , paralelos a los ejes **X** y **Y** originales. Por tanto casa punto P del plano puede expresarse con coordenadas en términos de **X** y **Y** ó en términos de **X'** y **Y'** .

Las coordenadas de cada punto del plano se cambian bajo una traslación de ejes. Para ver como cambian las coordenadas, examinamos la figura 1 Las coordenadas del origen **O'**, referidas a los ejes originales, se representan con (h, k). Así, los nuevos ejes se pueden obtener desplazando los ejes anteriores h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, manteniendo sin cambio de direcciones. Se llamará x, e y las coordenadas de cualquier punto P con respecto a los ejes anteriores (sistema primitivo) y, x' e y' las coordenadas de P con respecto a los nuevos ejes.



Es evidente que a partir de la figura que:

$$x = \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{O'Q} = h + x'$$

$$y = \overline{NP} = \overline{MO'} + \overline{QP} = k + y'$$

Por consiguiente:

$$\boxed{x = x' + h \quad ; \quad y = y' + k}$$

Estas fórmulas relacionan las "viejas" coordenadas (o anteriores) con las "nuevas" coordenadas; éstas valen para todos los puntos del plano donde el nuevo origen O' es cualquier punto del plano. En consecuencia, las sustituciones x' + h por x y y' + k por y en las ecuaciones de la curva referida a los ejes originales, da la ecuación de la misma curva referida a los ejes trasladados. Es indispensable que cada conjunto de ejes se denomine de manera adecuada, porque de no ser así, una gráfica se convierte es una confusión de trazos y líneas.

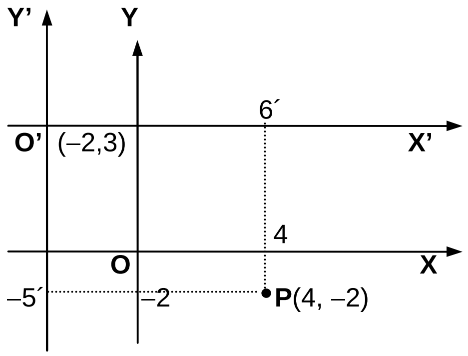
Ejemplos:

1. Encuentre las nuevas coordenadas del punto P(4, –2) si el origen se mueve a (–2, 3) mediante una traslación.

Solución

Como hay que encontrar las nuevas coordenadas del punto dado, se escriben las fórmulas de la traslación como x' = x – h e y' = y – k. Las coordenadas primitivas del punto dado son: x = 4; y = –2. Haciendo las sustituciones correspondientes se tiene:

x' = 4 – (–2) = 6 ; y' = –2 – 3 = –5



Por tanto las nuevas coordenadas del punto P son (6, –5), tal como se muestra en la figura de arriba.

2. Determinar las coordenadas del punto Q(10, 5) cuando los ejes coordenados son trasladados al nuevo sistema de origen **O'**(–4, 2)

Solución

Teniendo en cuenta que:
x = x' + h ; y = y' + k ; se tiene:
x = 10 ; y = 5
h = –4 ; k = 2 (nuevo origen)
entonces:
x' = x – h = 10 – (–4) = 14
y' = y – k = 5 – (2) = 3

Por tanto las nuevas coordenadas del punto Q es: (14, 3)

3. Dar las coordenadas de los puntos A(5, 2); B(0, 0) y C(4, 6) respecto al sistema de coordenadas **X'Y'** con origen en C(4, 6)

Solución

Teniendo en cuenta que: x = x' + h ; y = y' + k. Se tiene:

a) x = 5 ; y = 2 (coordenadas de A)
h = 4 ; k = 6 (nuevo origen)
entonces:
x' = x – h ; y' = y – k
= 5 – 4 ; = 2 – 6
= 1 ; = –4
$\Rightarrow$ (x', y') = (1, –4)

b) x = 0 ; y = 0 (coordenadas de B)
h = 4 ; k = 6 (nuevo origen)
entonces:
x' = x – h ; y' = y – k
= 0 – 4 ; = 0 – 6
= –4 ; = –6
$\Rightarrow$ (x', y') = (–4, –6)

c) $x = 4$; $y = 6$ (coordenadas de C)
$h = 4$; $k = 6$ (nuevo origen)
entonces:

$$\begin{aligned} x' &= x - h \quad ; \quad & y' &= y - k \\ &= 4 - 4 \quad ; & &= 6 - 6 \\ &= 0 \quad ; & &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x', y') = (0, 0)$

4. Determinar la ecuación de la recta L: $3x - 2y + 3 = 0$; cuando el origen es trasladado al punto **O'**(3, –2).

Solución

Teniendo en cuenta: $x = x' + h$; $y = y' + k$
tenemos:
$x = 3 + x'$; $y = -2 + y'$
sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación de la recta se tiene:

$$3(3 + x') - 2(-2 + y') + 3 = 0$$

ó

$$3x' - 2y' + 16 = 0$$

5. Encuentre la ecuación de la recta, L : $4x - 7y - 6 = 0$, con respecto al sistema cuyo origen es **O'** (–2, 5) y encontrar el punto donde corta al nuevo eje de las ordenadas.

Solución

Sustituimos x, y de acuerdo con: $x' = x - h$; $y' = y - k$ en la ecuación de la recta, por tanto tenemos:

$$4(x' + (-2)) - 7(y' + 5) - 6 = 0$$
$$4x' - 8 - 7y' - 35 - 6 = 0$$
$$4x' - 7y' - 49 = 0$$

ecuación general de la recta que escrita en la forma, reducida se tiene:

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{4}{7}x' - 7$$

de donde deducimos que la recta corta al nuevo eje de ordenadas en el punto (0, –7).

6. Por medio de una traslación de ejes, transformar la ecuación de la recta: $3x + y - 5 = 0$ en otra que no contenga término independiente.

Solución

La ecuación de una recta no contiene término independiente sí y sólo sí, pasa por el origen del sistema. Entonces, el nuevo origen **O'** puede ser cualquier punto de la recta dada, por ejemplo (0, 5).
Luego:
$x = 0 + x'$ y $y = 5 + y'$
sustituyendo estos valores en la ecuación de la recta, obtenemos:

$$3(0 + x') + (5 + y') - 5 = 0$$

$$3x' + y' = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

La ociosidad es imagen de la muerte ..... y el ocioso hombre muerto. Sabuco

1. Escribe las coordenadas de A(–6, 2) B(2, 4) y C(3, –1) respecto al siste-ma de coordenadas **X'Y'** con origen en: (3, –6). Dar como respuesta la suma de las coordenadas de los puntos en el nuevo sistema.
a) –14 b) 14 c) 13 d) –12 e) 0

2. Escribe las coordenadas de A(–6, 2) B(2, 4) y C(3, –1) respecto al siste-ma de coordenadas **X'Y'** con origen en: (2, 4). Dar como respuesta el producto de las coordenadas de los puntos en el nuevo sistema.
a) 0 b) 12 c) –14 d) 36 e) N.A.

3. Encuentre la ecuación de la recta: x – y = 6; con respecto al sistema de ejes **X'Y'** con origen en $\left(2/3,\ 3/2\right)$ y paralelos a los ejes originales.
a) 6x' – 6y' – 41 = 0
b) 6x' + 6y' + 41 = 0
c) 3x' – 3y' – 41 = 0
d) 6x' – 3y' + 41 = 0
e) 3x' – 41y' – 6 = 0

4. Encuentre la ecuación de la recta: y = 3; con respecto al sistema de ejes **X'Y'** con origen en $\left(2/3,\ 3/2\right)$ y paralelos a los ejes originales.
a) 2y' – 3 = 0
b) 6y' + 41 = 0
c) 3x' – 3y' – 41 = 0
d) x' – y' + 3= 0
e) x' + y' – 3= 0

5. Suponga que la ecuación de la recta L tiene ecuación 5x –3y –15 = 0. Encontrar la ecuación de la misma recta con respecto al sistema de ejes X' y Y' con origen en el punto **O'**(9, 5) y paralelos a los ejes originales.

a) 3x' – 3y' + 15 = 0
b) 5x' – 3y' + 15 = 0
c) 3x' – 5y' + 15 = 0
d) 5x' – 3y' – 15 = 0
e) 3x' – 5y' – 15 = 0

6. Determine las nuevas coordenadas de los vértices del cuadrilátero da-dos por los puntos A(3, 2); B(3, –2); C(–3, –2); D(–3, 2), si se trasladan los ejes de manera que el nuevo origen está en el punto **O'**(4, 1)
a) (–3, 1); (–2, –3); (–7, –3); (–7, 1)
b) (–4, 1); (–4, –3); (–1, –3); (–1, 7)
c) (–7, 1); (–1, –7); (–7, –3); (–7, 7)
d) (–2, 7); (–1, –3); (–1, –3); (–1, 7)
e) (–1, 1); (–1, –3); (–7, –3); (–7, 1)

7. Encuentre la nueva ecuación de la recta: 2x + y – 6 = 0 ; si el origen se mueve al punto **O'**(–2, 2) mediante una traslación de ejes.
a) 2x' – y' + 8 = 0
b) 2x' – y' – 8 = 0
c) x' + 2y' – 8 = 0
d) 2x' + y' – 8 = 0
e) x' – 2y' – 8 = 0

8. Encuentre Ud. la nueva ecuación del círculo $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$, después de una traslación que mueve el origen a punto (3, –2).

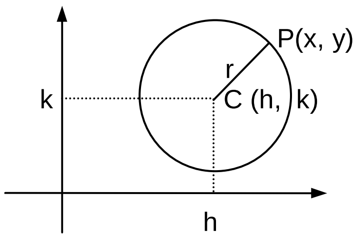
a) $x'^2 + y'^2 = 6$
b) $x'^2 + y'^2 = 16$
c) $x'^2 - y'^2 = 16$
d) $x'^2 - y'^2 = 1$
e) $x'^2 + y'^2 = 25$

LA CIRCUNFERENCIA

"Lo poco que sé se lo debo a mi ignorancia" **Platón**

Definición.-
Es el conjunto de todos los puntos sobre un plano "α" que son equidistantes de un punto fijo sobre el plano. Al punto fijo se le llama **centro** y a la distancia de cualquier punto de ella al centro se llama **radio.**
Es decir:

Circunferencia = {P ∈ α / PC = r}



de donde se tiene que:

$$\boxed{PC = r \iff r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}}$$

Así :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (\%)$$

desarrollando:

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$$

Si hacemos:

$D = -2h$
$E = -2k$
$F = h^2 + k^2 - r^2$

reemplazando en la anterior ecuación se obtiene:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

a la que se le lama **Ecuación general de la circunferencia**

Ahora si en esta ecuación completamos cuadrados se tiene:

$$x^2 + Dx + y^2 + Ey + F = 0$$

$$x^2 + Dx + (\frac{D}{2})^2 + y^2 + Ey + (\frac{E}{2})^2 - (\frac{D}{2})^2 - (\frac{E}{2})^2 + F = 0 \qquad @$$

$$(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

$$(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

aquí:

$$C = (h,k) = (-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$$

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

ahora analizando la cantidad subradical, $D^2 + E^2 - 4F$, tiene:

1) Si $D^2 + E^2 - 4F < 0 \Rightarrow r < 0$, no existe la circunferencia; es imaginaria.

2) Si $D^2 + E^2 - 4F = 0 \Rightarrow r = 0$, la circunferencia se convierte en un punto.

3) Si $D^2 + E^2 - 4F > 0 \Rightarrow r > 0$, la circunferencia existe y es real.

Ejemplos:

1. Determine la ecuación de la circunferencia de centro C(3, 5) y radio igual a 7.
Solución

Aplicamos la ecuación:

$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$. Entonces se tiene:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = 7$$

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 7^2$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 7^2$

$x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0$

2. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de centro C(2, –1) que pasa por P(3, 3)?
Solución

Primeramente hallamos la distancia del punto C al punto P, la que será el radio de la circunferencia buscada.

$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$; donde se tiene que: (h, k) = C(2, –1)

(x , y) = P(3, 3)

$$\sqrt{(3-2)^2 + (3-(-1))^2} = r$$

luego r = $\sqrt{17}$

Por tanto:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-(-1))^2} = \sqrt{17}$$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 17$

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$

3. ¿Cuál es la gráfica si existe de la ecuación: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 14 = 0$?

Solución

Completamos cuadrados y obtenemos que: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = -1$

Es claro que el miembro de la izquierda de la ecuación no puede ser negativo para valores reales de x, y. Por lo que afirmamos que dicha ecuación no tiene gráfica. (el radio r sería igual a −1; lo que no puede ser, ya que el radio siempre es una cantidad positiva).

4. Determinar la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos A(4, 6); B(−2, −2) y C(−4,2)

Solución

Los tres puntos dados siempre que no estén sobre una misma recta, determinan 3 condiciones geométricas que permiten definir a la circunferencia:

Reemplazando (4, 6) en:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$4^2 + 6^2 + 4D + 6E + F = 0$$
$$4D + 6E + F = -52$$

Reemplazando (−2, −2) en:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$-2D - 2E + F = -8$$

Reemplazando (−4, 2) en:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$-4D + 2E + F = -20$$

Resolviendo el sistema:

$$4D + 6E + F = -52$$
$$-2D - 2E + F = -8$$
$$-4D + 2E + F = -20$$

Se tiene:

$$D = -2 \quad ; \quad E = -4$$
$$F = -20$$

Por tanto la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

5. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(1, −2) ; B(5, 4); R(10, 5)

Solución

La ecuación de la circunferencia se puede expresar de la siguiente forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El problema al igual que en el anterior se reduce a encontrar valores para D, E y F tales que la ecuación se satisfaga por las coordenadas de cada uno de los puntos dados. Por tanto sustituimos las variables x, y en las coordenadas de estos puntos, dándonos el sistema de tres ecuaciones con tres variables:

$$1 + 4 + D - 2E + F = 0$$
$$25 + 16 + 5D + 4E + F = 0$$
$$100 + 25 + 10D + 5E + F = 0$$

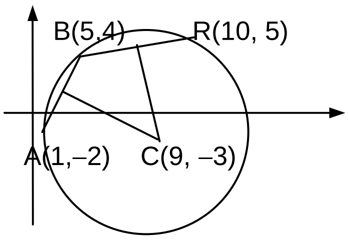
La solución de este sistema esta dado por:

$$D = -18$$
$$E = 6 \quad ; \quad F = 25$$

Por tanto la ecuación buscada es:

$$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 25 = 0.$$

De manera alternativa, este problema se resuelve aplicando la propiedad que las bisectrices perpendiculares de dos cuerdas no paralelas de una circunferencia se intersecan en el centro. Así, las ecuaciones de las mediatrices perpendiculares de AB y RC, tal como se muestran en la figura:



son:

$$2x + 3y = 9$$
$$5x + y = 42$$

La solución de este sistema es:
$x = 9$; $y = -3$. $\Rightarrow$ C(9, –3)

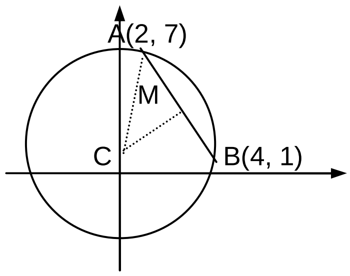
El radio de la circunferencia es la distancia del centro a cualquiera de los puntos dados. Por lo tanto la ecuación resultante (la pedida) es:

$(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 65$; la que resolviendo nos da:

$$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 25 = 0.$$

6. Determinar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el eje de ordenadas Y, y los extremos de una de sus cuerdas son los puntos A(2, 7) y B(4, 1)

Solución
Sea M punto medio de AB, luego:



$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{7+1}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow M = (3,4)$ Si C(0,k) es el centro de la circunferencia, entonces el triángulo rectángulo CMA , se tiene:

$$AC^2 = CM^2 + MA^2$$

$\sqrt{2^2 + (7-k)^2} = \sqrt{3^2 + (4-k)^2} + \sqrt{1^2 + 3^2}$ desarrollando los cuadrados y simplificando se tiene: k = 3. Luego C(0, 3)

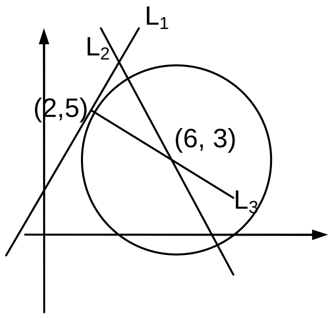
$r^2 = CA^2 = \sqrt{(2-0)^2 + (7-3)^2} = 20$

Luego la ecuación buscada es: $x^2 + (y - 3)^2 = 20$.

6. Una circunferencia es tangente a la recta L_1: $2x - y + 1 = 0$ en el punto (2, 5) y su centro está sobre la recta L_2: $x + y = 9$. encuentre la ecuación de la circunferencia.

Solución

Consideremos la siguiente figura:



A La recta que pasa por (2, 5) y es perpendicular a la recta L_1: $2x - y + 1 = 0$; pasa por el centro de la circunferencia, le llamamos L_3.
Como la pendiente de $L_1 = 2$, entonces la pendiente de L_3 es $-1/2$; luego usamos la ecuación punto pendiente para hallar la ecuación de la recta L_3, así:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 5 = -1/2(x - 2)$

desarrollando encontramos:

L_3: $2y + x - 12 = 0$

Por tanto la solución del sistema:

$x + 2y = 12$

$x + \ \ y = \ 9$

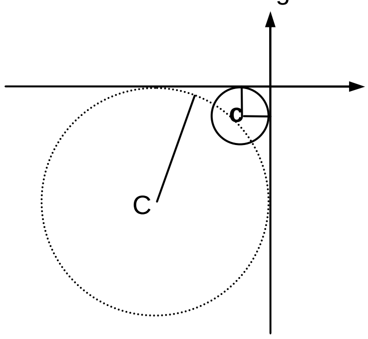
nos da las coordenadas del centro de la circunferencia (6, 3). Ahora la distancia de dicho centro (6, 3) al punto (2, 5) es $\sqrt{20}$ es igual al radio. Por lo que la ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 20$$

8. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes coordenados y pasa por el punto P(–2, –1)

Solución

Como el punto P(–2, –1) esta en el tercer cuadrante, entonces la circunferencia tangente a los ejes coordenados está íntegramente en el tercer cuadrante, así:



Si C(h, k) es el centro y r es el radio, entonces: $h = -r$ y $k = -r$ ($r > 0$)

reemplazando estos valores en:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

se tiene:

$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$

Como P(–2, –1) pertenece a la circunferencia entonces sus coordenadas satisfacen esta ecuación, esto es:

$(-2 + r)^2 + (-1 + r)^2 = r^2$

Resolviendo esta ecuación se obtiene: r = 1 ó r = 5

Por lo tanto existen dos circunferencias que pasan por el punto P(–2,–1) y son tangentes a los ejes coordenados. Sus ecuaciones son:

$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1^2$

ó

$(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 5^2$

ECUACIÓN NORMAL

Desarrollando la ecuación reducida (%) obtenemos:

$(x^2 - 2hx + h^2) + (y^2 - 2ky + k^2) = r^2$. Esto es:

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$ @

a la que se le llama **ecuación normal de la circunferencia.**

Así por ejemplo, la ecuación: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ representa una circunferencia de centro C(1, –1) y radio r = 3, puesto que equivale a:

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$

RECONOCIMIENTO DE UNA CIRCUNFERENCIA

Vamos a examinar ahora un problema muy importante: **“**dada una ecuación de segundo grado con coeficientes rea-les A, B, C, D, E, F y variables x, e y :

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ (3)

surgen las preguntas:

1. ¿Cuáles son las condiciones que A, B, C, D, E, y F deben satisfacer para que la ecuación represente una circunferencia?.

2. ¿Cuáles son las coordenadas del centro?

3. ¿Cuál es el radio? ”

Para resolver el problema, comparamos las ecuaciones:

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$ (2)

y

$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$ (3’)

Notemos que (2) es ciertamente la ecuación de una circunferencia y (3’) fue obtenida dividiendo (3) por A (dado que A es diferente de cero) , por tanto (3’) equivale a (3) **.**

Para que las ecuaciones (2) y (3') re-presenten a la misma curva (circunferencia) deben ser satisfechas por los mismos pares ordenados (x, y); esto es deben ser equivalentes, y para eso deben presentar coeficientes respectivamente iguales:

Término: $y^2 \rightarrow \frac{B}{A} = 1 \Rightarrow B = A \neq 0$

Término: $xy \rightarrow \frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$

Término: $x \rightarrow \frac{D}{A} = -2h \Rightarrow h = -\frac{D}{2A}$

Término: $y \rightarrow \frac{E}{A} = -2k \Rightarrow k = -\frac{E}{2A}$

Termino Independ $\rightarrow \frac{F}{A} = h^2 + k^2 - r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = h^2 + k^2 - \frac{F}{A} =$

$= \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$

Notemos que r es un número real positivo, entonces $r^2 > 0$. Por tanto:

$$D^2 + E^2 - 4AF > 0$$

es la condición necesaria para la exis-tencia de la circunferencia.

Vamos a responder las tres preguntas planteadas por el problema:

1) $B = A \neq 0$; $C = 0$, $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

que afirma que una ecuación de 2do grado sólo representa una circunfe-rencia si x^2 e y^2 tienen coeficiente iguales, si no existe término mixto xy y si:

$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$ es un real positivo.

2) Centro : $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$

3) Radio: $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2 \cdot |A|}$

Observaciones:

1. **Si una de las tres condiciones** necesarias:

   $A = B \neq 0$; $C = 0$, $D^2 + E^2 - 4AF > 0$; **no es satisfecha**, la ecuación:

   $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$,

   no representa una circunferencia; puede representar en cambio, una cónica, o una reunión de dos rectas, o un punto o un conjunto vacío.

2. Cuando la ecuación de una circunferencia presenta x^2 e y^2 con coeficientes unitarios (A = B = 1) las coordenadas del centro y el radio pueden ser calculadas por:

$h = -\frac{D}{2}$; $k = -\frac{E}{2}$; $r = \sqrt{h^2 + k^2 - F}$

3. Si A = B = 1, un proceso práctico **para calcular el centro y el radio** de una circunferencia, es **pasar la ecuación a la forma reducida**: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ donde la lectura de h, k, y r es inmediata.

Ejemplos:

1. Cuál de las ecuaciones de abajo re-presenta una circunferencia?

a) $x^2 + 3y^2 - 5x - 7y - 1 = 0$
b) $3x^2 + 3y^2 + xy - 4x - 6y - 9 = 0$
c) $3x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 15 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$
e) $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

Soluciones

a) No porque: A = 1 y B = 3 . vemos que x^2 e y^2 no tienen coeficientes iguales.
b) No porque C = 1. Aquí existe el término mixto xy, en la ecuación de la circunferencia no tiene ese término
c) No porque $D^2 + E^2 - 4AF = 16 + 36 - 180 = -138 < 0$ (el radio sería un número complejo)
d) No porque $D^2 + E^2 - 4AF = 4 + 4 - 8 = 0$. El radio sería un punto.
e) Si, porque A = B = 2, C = 0 y además $D^2 + E^2 - 4AF = 16 + 36 + 24 = 76 > 0$.

2. Hallar el centro y el radio de la circunferencia λ cuya ecuación esta dada por: $x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$.

Solución

En la ecuación de la circunferencia tenemos: A = B = 1, D = –2, E = 1; F = –1, entonces:

$a = -\frac{D}{2} = 1$; $b = -\frac{E}{2} = -\frac{1}{2}$;

$r^2 = a^2 + b^2 - F = 1 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4}$

luego el centro esta dado por:

$(1, -\frac{1}{2})$; y radio: $r = \frac{3}{2}$

3. Obtener el centro y el radio de la circunferencia λ cuya ecuación esta dada por: $4x^2 + 4y^2 - 4x - 12y + 6 = 0$

Solución

Dividimos la ecuación dada por 4, y se tiene:

$x^2 + y^2 - x - 3y + 3/2 = 0$

Aplicando las fórmulas simplificadas tenemos:

$a = -\frac{D}{2} = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{E}{2} = \frac{3}{2}$

$r^2 = a^2 + b^2 - F = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = 1$

Luego el centro es: $C(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

radio es: r = 1

4. Para que valores de m y k la ecuación: $mx^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$, representa una circunferencia?.

Solución

Sea $A = B \Rightarrow m = 1$

$D^2 + E^2 - 4AF > 0 \Rightarrow\ 16 + 36 - 4mk > 0$

$\Rightarrow 16 + 36 > 4k \Rightarrow$

$\Rightarrow\ k < \dfrac{52}{4} < 13\ \ \Rightarrow\ \ k < 13$. Por lo tanto: M = 1 y k < 13.

PROBLEMAS PROPUESTOS

“Sólo aquellos que nada esperan del azar son dueños del destino” Arnold.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro C(3, 5) y radio r = 7

a) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$
b) $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$
c) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 7$
d) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = \sqrt{7}$

10. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de centro C(3, –4) que pasa por el origen?.

a) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
b) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$
c) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 5$
d) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 0$

11. Encontrar el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $4x^2 + 4y^2 - 12x + 40y + 77 = 0$.

a) 4 b) $\sqrt{7}$ c) 5 d) $\sqrt{2}$

12. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es AB, sabiendo que A = (–1, –2); B = (5, 4).

a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 13 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 13 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 13 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 13 = 0$

13. Encuentre la ecuación de la circunferencia de centro (3, –1) y pasa por el punto (6, 3).

a) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 15 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$

14. Si los puntos A = (–6, 7) y B = (2, 3) son los extremos del diámetro de la circunferencia C, hallar el radio.

a) $2\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $4\sqrt{5}$ d) $\sqrt{5}$

15. Hallar la relación entre la ordenada del centro de la circunferencia y el radio de ecuación: $4x^2 + 4y^2 + 24x + 40y = -127$.

a) $10/3$ b) 5 c) $-10/3$ d) $1/3$

16. Hallar el producto de las coordenadas del centro con el radio del la circunferencia: $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y + 11 = 0$.

a) $4/3\sqrt{3}$ b) $-4/3\sqrt{3}$ c) $1/3\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3}$

17. Dado el cuadrado con vértices A(–3, 2), B(–7, 2), C(–7, –2) y D(–3, –2) encuentre la ecuación de la circunferencia inscrita.

a) $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 21 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 10x + 21 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 12 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 10x + 17 = 0$

18. Dado el cuadrado con vértices A(–3, 2), B(–7, 2), C(–7, –2) y D(–3, –2) encuentre la ecuación de la circunferencia circunscrita.

a) $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 21 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 10x + 21 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 10x – 4y + 12 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 10x + 17 = 0$

19. Encuentre la ecuación de la circunferencia C que tiene como centro el punto de intersección de las rectas L_1: $x – 2y + 13 = 0$ y L_2: $2x + 7y – 29 = 0$ y como radio la distancia de dicho punto a la recta L: $3x – 4y + 4 = 0$.

a) $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$
b) $x^2 + y^2 – 6x – 10y – 9 = 0$
c) $x^2 + y^2 – 6x – 10y + 9 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x – 10y + 9 = 0$

20. ¿Qué curva es la ecuación que satisfacen los puntos P(x, y) tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos A(1, –1) y B(–2, 3) es 25?.

a) Una circunferencia
b) Una parábola
c) Dos rectas secantes
d) Dos rectas paralelas distintas
e) No se puede determinar.

Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados de los ejercicios 21 - 23:

21. A(–4, 7), B(–1, 2) y C(4, 0)

a) $19x^2 + 19y^2 +175x + 333y = –396$
b) $19x^2 – 19y^2 +175x – 333y = –396$
c) $19x^2 + 19y^2 –175x – 333y = 396$
d) $19x^2 + 19y^2 –175x – 333y = –396$
e) $19x^2 + 19y^2 +175x + 333y = –39$

22. A(8, 8),B(–1, 5) y C(1, 9)

a) $x^2 + y^2 – 8x + 10y + 16 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 16 = 0$
c) $x^2 + y^2 – 8x – 10y + 16 = 0$
d) $x^2 – y^2 – 8x – 10y + 16 = 0$
e) $x^2 + y^2 – 8x – 10y – 16 = 0$

23. A($2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$), B(–4, 0) y C(0, –4)

a) $x^2 + y^2 – 16 = 0$
b) $x^2 + y^2 – 16x + 8y = 0$
c) $x^2 + y^2 + 16 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 4x + 10y – 16 = 0$
e) $4x^2 + 4y^2 – 16 = 0$

24. Hallar el valor de k para que la ecuación: $x^2 + y^2 –8x + 10y + k = 0$, represente una circunferencia de radio 7.

a) k = –4   b) k = –3   c) k = –8   d) k = 7

25. Hallar la ecuación de una de las circunferencia que pase por el punto (0, 0), tenga radio r = 13 y la abscisa de sus centro sea –12.

a) $x^2 + y^2 + 24x + 10y = 13$
b) $x^2 + y^2 – 24x – 10y – 13= 0$
c) $x^2 + y^2 + 24x – 10y = 0$
d) $x^2 + y^2 + 24x – 10y = 169$
e) $2x^2 + 2y^2 – 24x – 10y = 0$

26. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2, 3) y (–1, 1) y cuyo centro está situado en la recta L: $x - 3y - 11 = 0$.

a) $x^2 + y^2 - 7x + 5y = 14$
b) $x^2 + y^2 - 7x + 5y = -14$
c) $x^2 + y^2 - 7x - 5y = 14$
d) $x^2 + y^2 - 7x - 5y = -14$

27. Hallar el valor de k, para que la ecuación: $x^2 + y^2 - kx - 2y - 9k = 0$ represente a la circunferencia que pasa por los extremos del diámetro AB, si A = (–3, 5) y B = (7, –3).

a) k = 14 b) k = 2 c) k = –4 d) k = 4

28. Hallar la ecuación de una de las circunferencias que pase por el origen, de radio r = 10 y cuya abscisa de su centro sea –6.

a) $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$
b) $x^2 + y^2 + 12x + 16y - 36 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 12x - 16y = -36$
d) $x^2 + y^2 + 12x + 16y = 0$

Determinar en los ejercicios siguientes si las ecuaciones representan a una circunferencia real, imaginaria o un punto.

29. $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 12 = 0$

a) real de radio 4
b) imaginaria de radio 4
c) real para cualquier valor del radio
d) un punto

30. $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$

a) real de radio $\sqrt{13}/-3$
b) imaginaria de radio $\sqrt{13}/-3$
c) imaginaria de radio $\sqrt{-13}/3$
d) un punto

31. $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$

a) real para todo valor del radio
b) real para el radio igual a $\sqrt{113}/2$
c) imaginaria para el radio $\sqrt{113}/2$
d) un punto para el radio igual a 0
e) un punto para todo valor del radio

32. $x^2 + y^2 = 0$

a) un punto para r = 0
b) un punto para r = $\sqrt{113}/2$
c) imaginaria para r = $\sqrt{113}/2$
d) real para todo valor de r

33. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

a) real para un punto r = 4
b) real para r = 1/4
c) imaginaria para r = 1/4
d) un punto para r = 1/4

En los ejercicios 34 al 37 hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de lados:

34. L_1: $x - y + 2 = 0$; L_2: $2x + 3y = 1$; y L_3: $4x + y - 17 = 0$

a) $5x^2 + 5y^2 + 32x + 8y - 34 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$
c) $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$
d) $3x^2 + 3y^2 - 32x - 8y + 34 = 0$
e) $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y + 34 = 0$

35. L_1: $x + 2y - 5 = 0$; L_2: $2x + y - 7 = 0$; y L_3: $x - y + 1 = 0$
a) $3x^2 + 3y^2 - 13x - 11y + 20 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$
c) $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$
d) $3x^2 + 3y^2 + 13x - 11y - 20 = 0$
e) $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y + 34 = 0$

36. L_1: $3x + 2y - 13 = 0$; L_2: $x + 2y = 3$; y L_3: $x + y - 5 = 0$
a) $x^2 + y^2 - 17x - 7y + 52 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 52 = 0$
c) $5x^2 + 5y^2 - 17x - 7y + 52 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 13x - 11y - 20 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 17x + 7y + 52 = 0$

37. L_1: $2x + y - 8 = 0$; L_2: $x - y - 1 = 0$; y L_3: $x - 7y - 19 = 0$
a) $5x^2 + 5y^2 - 8x + 8y - 31 = 0$
b) $3x^2 + 3y^2 + 8x + 8y + 31 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 31 = 0$
d) $3x^2 + 3y^2 + 8x + 8y + 31 = 0$
e) $3x^2 + 3y^2 - 8x + 8y - 31 = 0$

En los ejercicios 38 al 41 hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de lados

38. L_1: $4x - 3y - 65 = 0$; L_2: $7x - 24y + 55 = 0$; y L_3: $3x + 4y - 5 = 0$
a) $x^2 + y^2 - 20x + 75 = 0$
b) $2x^2 + 2y^2 - 20x - 75 = 0$
c) $3x^2 + 3y^2 + 20x + 75 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 10x + 75 = 0$

39. L_1: $7x + 6y - 11 = 0$; L_2: $9x - 2y = -7$ y L_3: $6x - 7y - 16 = 0$
a) $85x^2 + 85y^2 - 60x + 70y - 96 = 0$
b) $2x^2 + 2y^2 - 20x - 75 = 0$
c) $85x^2 + 85y^2 + 60x + 70y + 75 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 60x + 75 = 0$

40. L_1: $y = 0$; L_2: $3x - 4y = 0$; y L_3: $4x + 3y - 50 = 0$
a) $3x^2 + 3y^2 - 60x - 20y - 225 = 0$
b) $4x^2 + 4y^2 + 60x + 20y - 225 = 0$
c) $4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 60x + 25 = 0$

41. L_1: $15x - 8y + 25 = 0$; L_2: $3x - 4y - 10 = 0$; y L_3: $5x + 12y - 30 = 0$
a) $784x^2+784y^2 - 896x - 392y = 2399$
b) $782x^2 + 782y^2 - 20x - 75y = 0$
c) $78x^2 + 78y^2 + 20x + 75y + 238 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 10x + 75 = 0$

42. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de vértices A(–1, 3); B(3, 6) y C($31/5$, 0)
a) $5x^2 + 5y^2 + 34x + 48y + 103 = 0$
b) $5x^2 + 5y^2 + 34x + 48y + 103 = 0$
c) $7x^2 + 7y^2 - 34x - 96y - 103 = 0$

d) $7x^2 + 7y^2 - 34x - 48y + 103 = 0$
e) $7x^2 - 7y^2 + 34x - 48y - 103 = 0$

43. Las rectas $\mathbf{L_1}$: $x + 2y - 20 = 0$ y $\mathbf{L_2}$: $x + 2y = 0$, determinan cuerdas iguales en una circunferencia. El punto medio de una de las cuerdas es S(8, 6). Hallar la ecuación de la circunferencia si ésta pasa por el punto Q(4,3).
a) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$
b) $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 5$
c) $(x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 5$
d) $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 5$

44. Hallar una de las ecuaciones de la circunferencia que pasa por A(2, 5) y B(3, 12), sabiendo que la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda AB es $5/\sqrt{2}$.
a) $(x - 1)^2 + (y - 9)^2 = 25$
b) $(x + 1)^2 + (y - 9)^2 = 25$
c) $(x + 6)^2 + (y - 9)^2 = 25$
d) $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 25$

45. ¿Cuáles de las ecuaciones representan una circunferencia?.
a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$
b) $2x^2 + 2y^2 - 14x - 16y + 63 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 34/4 = 0$
e) Ninguna es circunferencia.

46. Hallar la longitud de la cuerda a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 12x - 4y = 60$, si P(8, 6) es el centro de la cuerda.
a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $8\sqrt{5}$ d) $7\sqrt{5}$

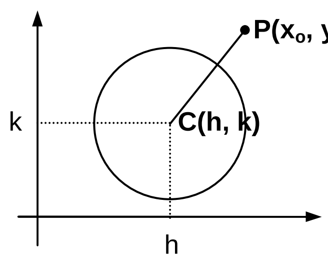
47. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en la recta: $2x + 5y = 26$, y que pasa por los puntos A(–4, 3) y B(–2, –1).
a) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 70$
b) $(x - 4)^2 + y^2 = 25$
c) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 50$
d) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$

PUNTO Y CIRCUNFERENCIA

Vamos a resolver el problema: "¿dados un punto $P(x_o, y_o)$ y una circunferencia λ de ecuación: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ cuál es la posición de P en relación a λ?

Calculemos la distancia de $P(x_o , y_o)$ hasta el centro C(h, k) y comparemos esta con el radio r. por lo tanto son posibles tres casos:

1er caso: P es exterior a λ.
Esto ocurre si y solamente si: **PC > r**

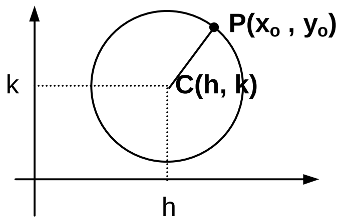


esto es: $(x_o - h)^2 + (y_o - k)^2 > r^2$

o también: $(x_o - h)^2 + (y_o - k)^2 - r^2 > 0$

2do caso: P pertenece a λ.

Esto ocurre si y solamente si: **PC = r**



esto es: $(x_o - h)^2 + (y_o - k)^2 = r^2$

o

también: $(x_o - h)^2 + (y_o - k)^2 - r^2 = 0$

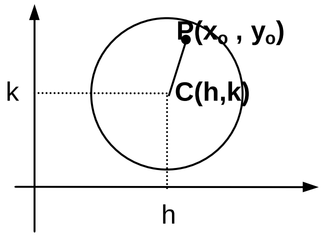
3er caso: P es interior a λ.

Esto ocurre si y solamente si: **PC < r.**

esto es: $(x_o - h)^2 + (y_o - k)^2 < r^2$

ó

también: $(x_o - h)^2 + (y_o - k)^2 - r^2 < 0$



Podemos resumir esta teoría así: Dada la circunferencia λ de ecuación: $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$, sea f(x, y) el polinomio del primer miembro, esto es:

$f(x, y) = (x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2$

cuando es dado $P(x_o , y_o)$ cuya posición en relación a λ queremos determinar, sustituimos (x_o , y_o) en f y calculamos:

$f(x_o, y_o) = (x_o - h)^2 + (y_o - k)^2 - r^2$

entonces conforme vimos:

$f(x_o, y_o) > 0 \Leftrightarrow$ P es exterior a λ

$f(x_o, y_o) = 0 \Leftrightarrow P \in \lambda$

$f(x_o, y_o) < 0 \Leftrightarrow$ P es interior a λ

Ejemplos:

1. ¿Cuál es la posición de P(2, 3) y de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x = 0$?.
   Solución

   Tenemos $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$
   Entonces:
   $f(2, 3) = 2^2 + 3^2 - 4(2) = 5 > 0$
   Por lo tanto P es exterior a la circunferencia.

2. Cuál es la posición del punto P(0, 0) y de la circunferencia: $x^2 + y^2 - \sqrt{3}\,x + \sqrt{2}\,y = 0$?
   Solución

   Tenemos:
   $f(x, y) = x^2 + y^2 - \sqrt{3}\,x + \sqrt{2}\,y$
   Entonces:
   $f(0, 0) = 0^2 + 0^2 - \sqrt{3}\,(0) + \sqrt{2}\,(0) = 0$
   Por lo tanto, el punto P, pertenece a la circunferencia dada.

3. Determinar la posición de P(0, 1) y de la circunferencia: $2x^2 + 2y^2 + 5x + y - 11 = 0$
   Solución

   Tenemos:
   $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 5x + y - 11 = 0$
   entonces:
   $f(0, 1) = 2(0)^2 + 2(1)^2 + 5(0) + 1 - 11$
   $f(0, 1) = -8 < 0$
   Por tanto el punto P es interior a la circunferencia dada.

Nota:
Observemos que sustituir $P(x_o\ ,\ y_o)$ en la función f(x, y) es mucho simple que calcular PC y comparar con el radio r, pues obtener C y r es una operación trabajosa principalmente si la ecuación de la circunferencia tiene coeficientes irracionales.

INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

Dadas una recta L: $ax + by + c = 0$ y una circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ hallar la intersección de la recta L y la circunferencia es determinar los puntos P(x, y) que pertenecen a las dos curvas. Es entonces inmediato que si: $P \in L$, y P pertenece a la circunferencia, P satisface el sistema:

$$\begin{array}{c} ax + by + c = 0 \\ (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \end{array}$$

que puede ser resuelto fácilmente por sustitución.

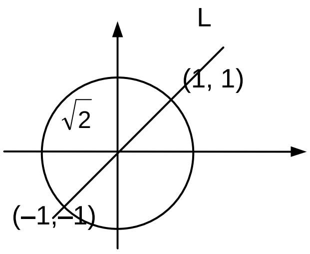
Ejemplos:

1. Obtener la intersección de la recta **L:** y = x, con la circunferencia λ dada por la ecuación: $x^2 + y^2 = 2$.
   Solución

   Efectuando la sustitución de y por x de la ecuación de la recta en la ecuación de la circunferencia se tiene:

   $$x^2 + (x)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 = y \ \ ; \ \ o \\ x = -1 = y \end{cases} \text{; por lo tanto}$$
   $\mathbf{L} \cap \lambda = \{(1, 1)\ ,\ (-1, -1)\}$

gráficamente se tiene que la recta **L** y la circunferencia **λ,** son secantes, puesto que tienen dos puntos de intersección:



2. Obtener la intersección de la recta **L**: y = x –2, con la circunferencia **λ:** $x^2 + y^2 = 2$.

Solución

Sustituyendo la ecuación de la recta en la circunferencia tenemos:

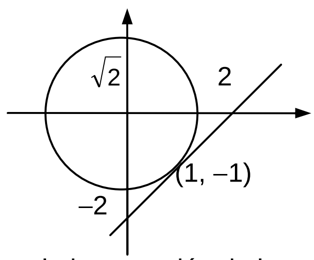
$x^2 + (x - 2)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$

De donde:

x = 1, entonces y = –1

Luego sólo hay un punto de intersección entre la recta y la circunferencia, que es P(1, –1). Es decir: $L \cap \lambda = \{(1, -1)\}$

gráficamente se tiene que la recta L y la circunferencia **λ,** son tangentes dado que sólo tienen un punto de intersección:



3. Obtener la intersección de la recta L: y = x – 3, con la circunferencia **λ** : $x^2 + y^2 = 2$.

Solución

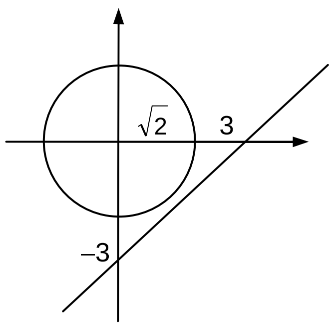
Sustituyendo la ecuación de la recta en la circunferencia tenemos:

$x^2 + (x - 3)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 7 = 0$

ecuación que no tiene una solución real, por lo que se afirma que no existe x que pertenezca a los reales.

Así: $L \cap \lambda = \varnothing$

gráficamente se tiene que la recta L y la circunferencia **λ,** son exteriores,



POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

Las posiciones relativas de una recta **L:** ax + by + c = 0 y una circunferencia **λ:** $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, es determinada investigando el número de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \end{cases}$$

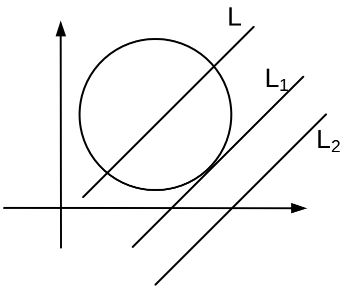
Como en los ejemplos anteriores aplicando el método de sustitución, la ecuación de la circunferencia se reduce a una ecuación de 2do grado con una variable o incógnita. Por tanto: **El discriminante (Δ) de esa ecuación de segundo grado define el número de soluciones del siste-ma y por lo tanto, la posición de la recta y la circunferencia.**
Luego:

$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$ secantes (**L**)

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow$ tangentes (L_1)

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow$ exteriores (L_2)

gráficamente se tiene:



Ejemplos:

1. La recta **L**: y = 2x + 1 y la circunferencia λ: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ son exteriores, pues sustituyendo la ecuación de la recta en la circunferencia se tiene:

$x^2 + (2x + 1)^2 - 2x = 0 \Rightarrow 5x^2 + 2x + 1 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16 < 0$

2. La recta **L**: 3x + 4y = 0 y la circunferencia λ: $x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$, son secantes pues, sustituyendo "y" de la ecuación de la recta en la ecuación de la circunferencia, se tiene:

$$x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 + x + \left(-\frac{3x}{4}\right) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$25x^2 + 4x - 16 = 0$

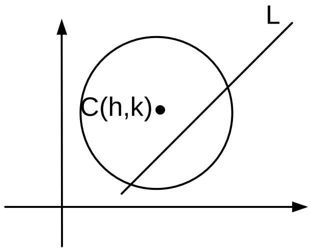
$\Delta = 4^2 - 4(25)(-16) = 1616 > 0$

Observación:

La posición relativa de una recta dada, **L:** ax + by + c = 0 y una circunferencia **λ:** $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ puede ser determinada mas fácilmente, comparando la distancia entre el centro C y la recta **L**, con el radio "r". Son posibles tres casos:

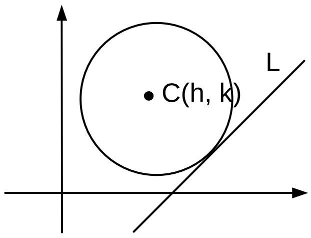
1er caso:

$$\left|\frac{ah + bk + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| < r \Rightarrow \text{ secantes}$$



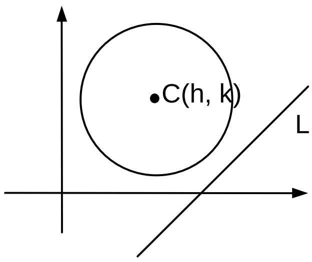
2do caso:

$$\left|\frac{ah+bk+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = r \Rightarrow \text{ tangentes}$$



3er caso:

$$\left|\frac{ah+bk+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > r \Rightarrow \text{ exteriores}$$



Ejemplos:

1. ¿Cuál es la posición de la recta **L**: $3x + 4y - 10 = 0$ y la circunferencia definida por **λ:** $x^2 + y^2 = 9$?

Solución

Puesto que necesitamos las coordenadas del centro C(h, k) y el radio “r” de la circunferencia, las obtenemos de la ecuación: **λ:** $x^2 + y^2 = 9$ siendo estas : $h = 0$; $k = 0$; $r = 3$; reemplazando en una de las anteriores fórmulas se tiene:

$$\left|\frac{3(0)+4(0)-10}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 2 < 3 = r$$

Por tanto la recta **L** y la circunferencia λ; son secantes.

2. Cuál es la posición de la recta **L:** $4x + 3y = 0$, en relación a la circunferencia **λ:** $x^2 + y^2 + 5x - 7y = 1$?

Solución

Resolveremos el problema por dos métodos diferentes:

1er método:

De la ecuación de la recta despejamos x, así : $x = -\frac{3y}{4}$; y sustituimos en la ecuación de la circunferencia pro-puesta:

$$(-\frac{3y}{4})^2 + y^2 + 5(-\frac{3y}{4}) - 7y - 1 = 0$$

de donde:

$9y^2 + 16y^2 - 60y - 112y - 16 = 0$

$25y^2 - 172y - 16 = 0$. Entonces el discriminante de la ecuación es:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-172)^2 - 4(25)(-16) > 0$

Por tanto:

La recta es secante a la circunferencia.

2do método:

Completamos cuadrados en la ecuación de la circunferencia, $x^2 + y^2 + 5x - 7y = 1$, para expresarla en la forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Así tenemos:

$$(x + \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{78}{4}$$

de donde:

$C = \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ y el radio (0bservación 2, página 12):

$$R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{49}{4} + 1} = \frac{\sqrt{78}}{2}$$

y la distancia del centro a la recta es:

$$d = \left| \frac{4(-\frac{5}{2}+) + 3(\frac{7}{2})}{\sqrt{16 + 9}} \right| = \left| \frac{21 - 20}{10} \right| = \frac{1}{10}$$

Como: radio = $\frac{1}{10}$ < d = $\frac{\sqrt{78}}{2} \approx 4.4$ entonces, la recta es secante a la circunferencia.

3. Determinar k de modo que la recta L: $4x - 3y + k = 0$, sea exterior a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

Solución

Expresamos la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, en su forma reducida:
$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
Por tanto el centro C = (1, 1) y radio r = 1

Para que la recta L sea exterior a la circunferencia, deberá cumplir:

$$d = \left| \frac{ah + bk + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| > r \Rightarrow \text{ exteriores , luego:}$$

$$d = \left| \frac{4(1) + 3(1) + k}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| > r \Rightarrow \left| \frac{k+1}{5} \right| > 1$$

esto es:

$(k + 1)^2 > 25 \Rightarrow k^2 + 2k - 24 > 0 \Rightarrow$
$k < -6$ ó $k > 4$
es decir:

$k \in \langle -\infty, -6\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle = \mathbb{R} - [-6, 4]$

POTENCIA DE UN PUNTO EN RELACION A UNA CIRCUNFERENCIA

Definición.-
Dados un punto $P(x_o , y_o)$ y una circunferencia de centro C(h, k) y radio "r" se denomina **potencia** del punto P en relación a la circunferencia dada, al número real:

$$\boxed{\text{Pot (P)} = d^2 - r^2}$$

donde d es la distancia de $P(x_o , y_o)$ al centro C(h, k)
De la definición se tiene:

1. Si **Pot (P) > 0**, entonces $P(x_o , y_o)$ es punto exterior a la circunferencia. En este caso, la potencia de P es igual al cuadrado de la longitud de la tangente trazada desde P, es decir: Pot (P) = t^2

2. Si **Pot (P) = 0**, entonces $P(x_o, y_o)$ pertenece a la circunferencia.

3. Si **Pot (P) < 0**, entonces $P(x_o , y_o)$ es interior a la circunferencia.

4. Si la ecuación de la circunferencia es: $(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2 = 0$, entonces la potencia del punto $P(x_o , y_o)$ será:

$$\boxed{\text{Pot (P)} = (x_o - h)^2 + (y_o - k)^2 - r^2}$$

5. Si la ecuación de la circunferencia es de la forma:
   $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

la potencia del punto $P(x_o, y_o)$ es:

$$\boxed{\text{Pot (P)} = x_o^2 + y_o^2 + Dx_o + Ey_o + F}$$

Nota.

De las dos anteriores fórmulas de la potencia podemos concluir que la potencia de un punto en relación a una circunferencia está dada por el valor que adquiere el primer miembro de la ecuación de esta circunferencia, cuando se sustituyen las variables x e y por las coordenadas del punto.

Ejemplos:

1. Determinar los valores de “a” para que el punto P(4, a) sea respectivamente exterior, perteneciente e interior a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$.

Solución

La posición del punto respecto a la circunferencia depende de su poten-cia; de la fórmula: Pot (P) = $x_o^2 + y_o^2 + Dx_o + Ey_o + F$ la potencia de P(4, a) en relación a la circunferencia dada es:

Pot (P) = $4^2 + a^2 - 4(4) + 2a - 15 =$

$= (a + 5)(a - 3)$

Entonces:

a) Pot (P) > 0 $\Leftrightarrow$ a – 5 ó a > 3 $\Leftrightarrow$ P es exterior a la circunferencia.

b) Pot (P) = 0 $\Leftrightarrow$ a = –5 ó a = 3 $\Leftrightarrow$ P está sobre la circunferencia.

c) Pot (P) < 0 $\Leftrightarrow$ –5 < a < 3 $\Leftrightarrow$ P es interior a la circunferencia.

2. Hallar la longitud de la tangente desde el punto exterior P(–3, 8) a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2x + 6y = -17$

Solución

Como t^2 = Pot (P)

$t^2 = (-3)^2 + (8) - 2(-3) + 6(8) + 17$

$t^2 = 144. \Rightarrow t = 12.$

EJE RADICAL

Definición.-

Dadas dos circunferencias no concéntricas, **el eje radical** de las dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas potencias respecto a cada una de las circunferencias dadas son iguales.

Consideremos dos circunferencias no concéntricas cuyas ecuaciones son:

λ_1: $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$

λ_2: $x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$

Si P(x, y) es un punto del eje radical, sus potencias en relación a las circunferencias dadas son, respectivamente:

$P_1 = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1$

$P_2 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2$

Por la definición de eje radical se verifica que: $P_1 = P_2$; esto es:

$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2$

simplificando se tiene:

$$\boxed{(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0}$$

Como las circunferencias no son con-céntricas, entonces $D_1 \neq D_2$ ó $E_1 \neq E_2$; lo que implica que por lo menos uno de los coeficientes, de x ó de y, no es nulo luego, **la ecuación anterior representa a una recta**, **llamada eje radical** que tiene la propiedad de ser perpendicular a la recta que pasa por los centros de las circunferencias.

Ejemplos:

1. Dadas las circunferencias:
$x^2 + y^2 + 8x + 6y + 21 = 0$
$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

a) Hallar la ecuación del eje radical.
b) verificar que el eje radical es perpendicular a la recta que pasa por los centros.

Solución

a) Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos la ecuación del eje radical, así:

$L : 12x + 8y + 17 = 0$

b) Los centros de las circunferencias los hallamos completando cuadra-dos en cada una de las ecuaciones de tal manera que:

$C(-4, -3)$; $C_1 (2, 1)$

Hallando las pendientes se tiene:
Pendiente del eje radical: $-3/2$
Pendiente de los centros: $2/3$

Como el producto de las pendientes es igual a -1, entonces afirmamos que el eje radical y la recta que une los centros son perpendiculares.

2. Hallar el eje radical de las circunferencias, $C: x^2 + y^2 = 9$ e C_1: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Solución

Tenemos que: $C - C_1 = 0$
$x^2 - y^2 - 9 = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 4$
de donde el eje radical esta dado por la ecuación:
$L: 2x + 2y - 7 = 0$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

1. INTERSECCIÓN DE CIRCUNFERENCIAS

Dadas las circunferencias:
$\lambda_1 : (x-h_1)^2 + (y-k_1)^2 = r_1^2$
$\lambda_2 : (x-h_2)^2 + (y-k_2)^2 = r_2^2$
hallar la intersección de λ_1 y λ_2, y de-terminar los puntos $P(x, y)$ que pertenecen a las curvas.

Si $P(x, y)$ pertenece a λ_1 y λ_2 entonces P satisface al sistema:

$$\begin{cases} (x-h_1)^2 + \ \ y-k_1)^2 = r_1^2 \\ (x-h_2)^2 + (y-k_2)^2 = r_2^2 \end{cases} \qquad (\%)$$

que puede ser resuelto así:

1) restar miembro a miembro las ecuaciones de las circunferencias.

2) Despeje de una de las ecuaciones, una de las variables en primer grado y sustituya en una de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo

Obtener la intersección de la circunferencias de centro $C_1(0, 2)$ y radio $r_1 = 2$; con la circunferencia de centro $C_2(1, 0)$ y radio $r_2 = 1$.

Solución

Remplazando los valores en el sistema (%) tenemos:

$$\begin{cases} (x-0)^2 - (y-2)^2 = 4^2 \\ (x-1)^2 - (y-0)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$ de donde restando la segunda de la primera se tiene:

$-4y + 2x = 0 \Rightarrow x = 2y$

Este valor ahora lo sustituimos en la 1era circunferencia, así:

$(2y - 0)^2 + (y - 2)^2 = 4$

$5y^2 - 4y = 0$. de donde:

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 2y = 0; \quad \text{o}' \\ y = \dfrac{4}{5} \Rightarrow x = 2y = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

esto es las circunferencias tienen dos puntos comunes: $P(0, 0)$ y $Q(8/5, 4/5)$ los que corresponden a la intersección de ellas.

2. POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS.

La posición relativa de dos circunferencias de ecuaciones:

$\lambda_1 : (x - h_1)^2 + (y - k_1)^2 = r_1^2$

$\lambda_2 : (x - h_2)^2 + (y - k_2)^2 = r_2^2$

se determina comparando la distancia C_1C_2 entre los centros con la suma: $r_1 + r_2$, ó con la diferencia $|r_1 - r_2|$ de los radios.

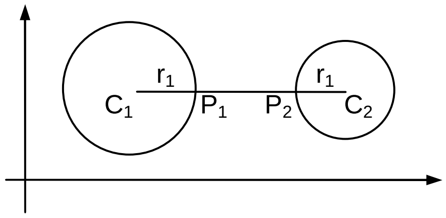
Calculada la distancia entre los centros:

$d = C_1C_2 = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + (k_1 - k_2)^2}$

son posibles seis casos distintos:

1er caso: $\boxed{d > r_1 + r_2}$

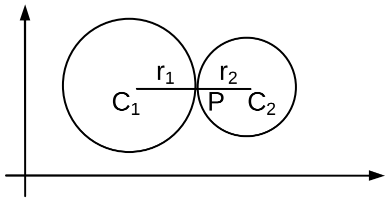
Teniendo en cuenta la figura siguiente vemos que:



$$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} + \underbrace{P_1P_2}_{>0} + \underbrace{P_2C_2}_{r_2} > r_1 + r_2$$

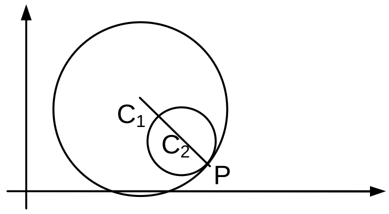
aquí las circunferencias son exteriores.

2do caso. $\boxed{d = r_1 + r_2}$. Aquí tenemos que:



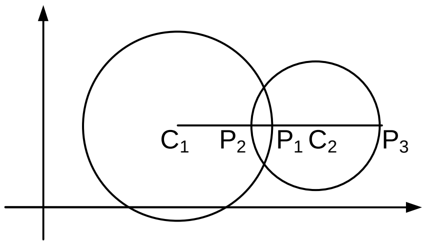
$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} + \underbrace{P_2C_2}_{r_2} = r_1 + r_2$. Lo que confirma que las circunferencias son tangentes exteriores.

3er caso: $\boxed{.\, d = |r_1 - r_2|}$ pues: $d = \underbrace{C_1P}_{r_1} - \underbrace{P_2C}_{r_2} = |r_1 - r_2|$



las circunferencias son tangentes interiores.

4to caso: $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$. aquí tenemos:



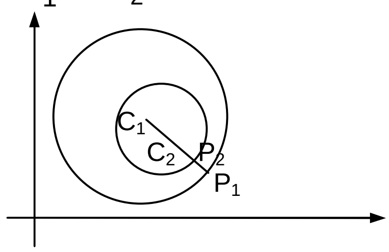
$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} + \underbrace{C_2P_2}_{r_2} - \underbrace{P_1P_2}_{>0} < r_1 + r_2$

$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} + \underbrace{P_1P_3}_{>0} - \underbrace{P_3C_2}_{r_2} > r_1 - r_2$ .Por tanto las circunferencias secantes.

5to caso. $0 \le d < |r_1 - r_2|$

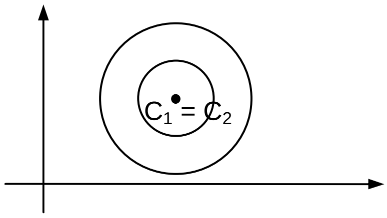
aquí tenemos que:

$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} - \underbrace{C_2P_2}_{r_2} - \underbrace{P_1P_2}_{>0} < r_1 - r_2$



circunferencia de menor radio e interior a otra.

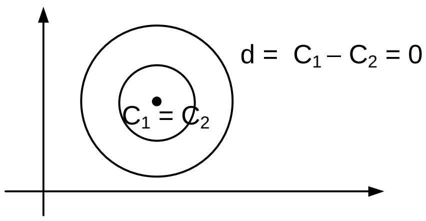
6to caso: $\boxed{d = 0}$



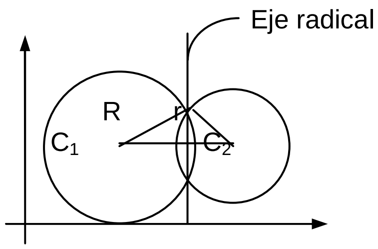
caso particular del 5to caso. Aquí las circunferencias son concéntricas.

Observaciones:
Teniendo en cuenta el eje radical las posiciones de las circunferencias tienen las siguientes características:

1. Si las circunferencias son concéntricas el eje radical no existe.

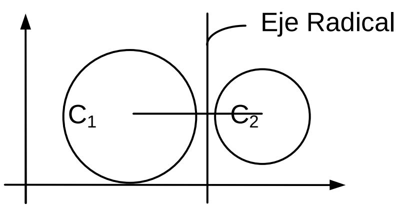


2. Si las circunferencias son secantes el eje radical pasa por los puntos de intersección de las circunferencias, es decir, el eje radical contiene a la cuerda común.



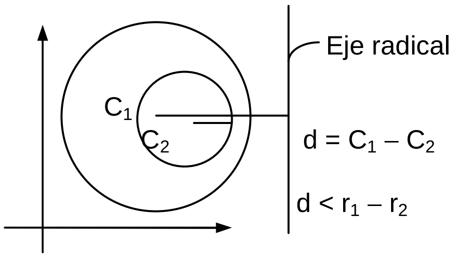
$d = C_1C_2 < r_1 + r_2$

3. Si las circunferencias son exteriores el eje radical es perpendicular al segmento que une los centros. Si las circunferencias tienen el mismo radio, el eje radical pasa por el punto medio del segmento que une los centros.

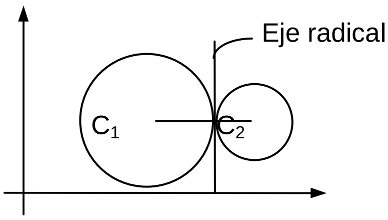


$d = C_1C_2 > r_1 + r_2$

4. Si las circunferencias son interiores el eje radical perpendicular a la recta que une sus centros, pasa por un punto exterior a la circunferencia de mayor radio y está a menor distancia del centro de la circunferencia de menor lado.

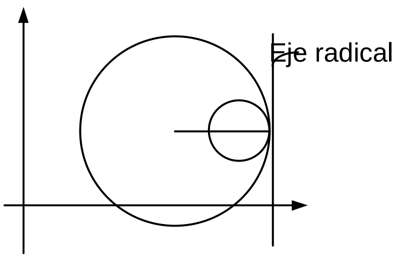


5. Si las circunferencias son tangentes exteriores, entonces el eje radical es la tangente común



$d = C_1C_2 = r_1 + r_2$

6. Si las circunferencias son tangentes interiores entonces el eje radical es la tangente común a ambas circunferencias.



$d = C_1C_2 = r_1 - r_2$

TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

La determinación de la ecuación de una tangente a una circunferencia se simplifica considerablemente por la propiedad que nos afirma que : **"La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia".**

Desarrollamos aquí el llamado **método del discriminante** que consiste en resolver simultáneamente el sistema de ecuaciones que se forma conocida la ecuación de la recta tangente y la circunferencia, así:

L: $ax + by + c = 0$ (1)

C: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (2)

De (1) despejamos y en términos de x y reemplazamos en (2), obtenemos una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuya raíces estan dadas por la cono-cida fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La naturaleza de las raíces de esta ecuación depende del discriminante:

$\Delta = b^2 - 4ac$; así tenemos:

1. Si: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$, entonces las raíces no son reales, es decir, no existe intersección entre la recta y la circunferencia.

2. Si: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$ entonces las raíces son reales, esto es, existen dos puntos de intersección entre la recta y la circunferencia. Por tanto la recta es secante.

3. Si: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$, entonces existe una única raíz real, es decir, existe un único punto de intersección entre la recta y la circunferencia; luego la recta es tangente a la circunferencia.
   A esta propiedad se le conoce co-mo **condición de tangencia de una circunferencia.**

   Este método llamado el método del discriminante se usa también para determinar las tangentes a curvas cuyas ecuaciones son de segundo grado.

ECUACION DE LA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA.

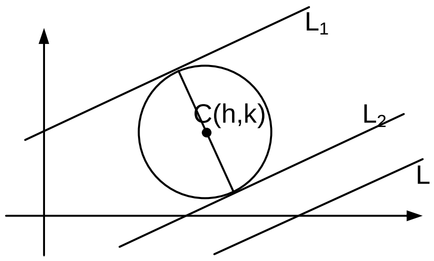
Un problema clásico resulta ser el problema de la ecuación de la tangente a una circunferencia que tratamos aquí:

1er caso
Trazar las tangentes a una circunfe-rencia dada, paralelas a una recta dada.

El problema consiste en: Dadas
λ: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
L: $ax + by + c = 0$.
Obtener las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 paralelas a la recta L y tangentes a λ
Solución

Consideremos la ecuación de la familia de rectas paralelas a la recta L: (ver la figura)

$$ax + by + c = 0$$



La rectas L_1 y L_2 de esa familia corres-ponden a dos valores particulares c de la ecuación de la familia. Para deter-minar esos dos valores c_1 y c_2 debemos considerar la condición de tangencia.

$$d(C, L_1) = d(C, L_2) = r$$

Luego:

$$\boxed{\left|\frac{ah + bk + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = r}$$

ecuación que al resolverla se obtiene los valores de c_1 y c_2; siendo por tanto las ecuaciones de las tangentes:

L_1: $ax + by + c_1 = 0$

L_2: $ax + by + c_2 = 0$

Ejemplo:

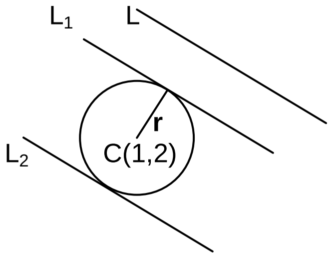
Determinar las ecuaciones de las rectas , que son paralelas a L: 12x + 5y + 1 = 0 y tangentes a la circunferencia: **λ:** $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4y - 20 = 0$.

Solución

1) Hallamos el centro y el radio de la circunferencia de **λ:** completando cuadrados se tiene:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 25 = 0$

$\Rightarrow$ C(1, 2) y r = 5



2) Ecuación de la familia de rectas // L.

L: 12x + 5y + c = 0 .

$$d(C, L) = r \Rightarrow \left|\frac{ah + bk + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = r$$

$$\left|\frac{12(1) + 5(2) + c}{\sqrt{12^2 + 5^2}}\right| = 5 \Rightarrow |22 + c| = 5(13) \Rightarrow |22 + c| = 65$$

de donde se obtiene: c + 22 = ± 65 . Es decir: $c_1 = 43$ ó $c_2 = -87$.

Por tanto las ecuaciones de las tangentes son:

L_1: 12 + 5y + 43 = 0

L_2: 12 + 5y – 87 = 0

2do caso:

Trazar por un punto dado las rectas tangentes a una circunferencia dada.

El problema consiste en:

$$\text{Dados: } \begin{cases} \lambda: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ P(x_o, y_o) \end{cases}$$

Obtener L_1 y L_2 que pasen por P y sean tangentes a **λ.**

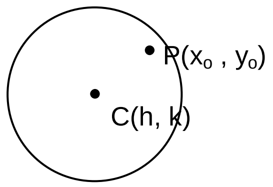
Solución

Para la solución verificamos primero cual es la posición del punto P en relación a la circunferencia. Existen tres casos posibles:

1) Si P es interior a la circunferencia

Por la relación del punto y la circunferencia observamos que:

$$(x_o - h)^2 + (y_o - k)^2 < r^2$$



Por tanto, P es interior a la circunferencia y el **problema no tiene solución**

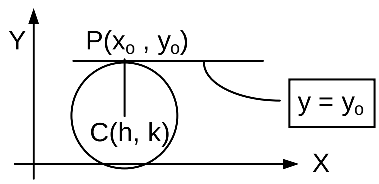
2) Si P pertenece a la circunferencia.

En este caso se tiene:

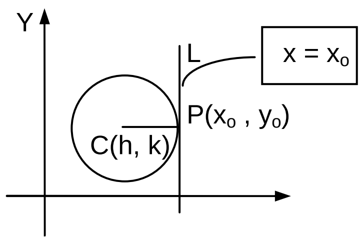
$$(x_o - h)^2 + (y_o - k)^2 = r^2$$

Entonces: P_o pertenece a la circunferencia, por lo tanto el problema tiene solución única.

a) si $x_o = h$ la ecuación de la tangente L es: $y = y_o$ (recta // al eje X).

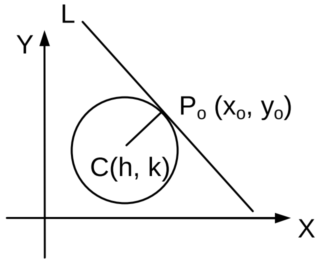


b) Si $y_o = k$, entonces la recta tangente tiene por ecuación L: $x = x_o$.



c) Si $x_o \neq h$ y $y_o \neq k$; consideramos la familia de rectas que pasan por el punto $P_o(x_o , y_o)$:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$



determinamos la pendiente m , teniendo en cuenta la condición de tangencia:

$L \perp P_oC \Rightarrow$

$$m = -\frac{1}{m_{P_0C}} = -\frac{x_0 - h}{y_0 - k} = \frac{h - x_0}{y_0 - k}$$

luego la ecuación de la tangente es:

$$\boxed{y - y_0 = \frac{a - x_0}{y_0 - b}(x - x_0)}$$

3. Si P es exterior a la circunferencia

Por la relación del punto y la circunferencia pág. 14 observamos que:

$(x_o - h)^2 + (y_o - k)^2 > r^2$

Por lo tanto : P_o es exterior a la circunferencia, y en este caso el problema tiene dos soluciones:

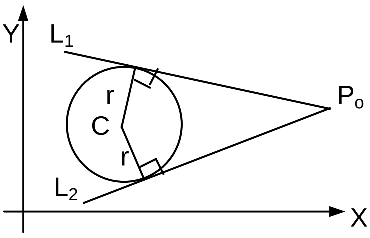
Consideremos la familia de rectas que concurren en el punto $P_o(x_o, y_o)$.

Su ecuación es:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

esto es:

$$mx - y + (y_o - mx_o) = 0$$



Las rectas L_1 y L_2 constituyen rectas particulares de esa familia que cumplen la condición de tangencia:

$$d(C, L_1) = d(C, L_2) = r$$

Luego:

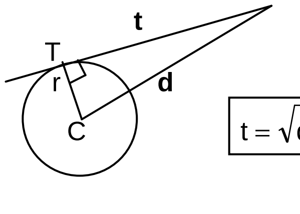
$$\boxed{\left|\frac{m \cdot h - k + (y_o - m \cdot x_o)}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = r}$$

de donde resulta una ecuación de 2do grado, cuyas raíces son: m_1 y m_2; las que usamos para escribir las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 tangentes a la circunferencia. Así:

$$\boxed{\begin{array}{l} L_1 : y - y_o = m_1(x - x_o) \;\; ; \quad y \\ L_2 : y - y_o = m_2(x - x_o) \end{array}}$$

Longitud de la tangente.

Dados una circunferencia y un punto P, exterior a ella, se denomina **longitud de la tangente** (**t**) a la distancia entre el punto P y el punto de tangencia T.



$$\boxed{t = \sqrt{d^2 - r^2}}$$

Observaciones:

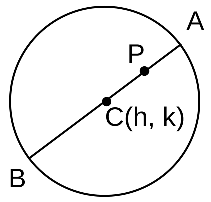
1. La recta perpendicular a la tangente en el punto de contacto es llamada Normal a la circunferencia.

2. En toda circunferencia, la normal a una circunferencia pasa por su centro.

DISTANCIA MÁXIMA Y MÍNIMA A UNA CIRCUNFERENCIA

La distancia mínima (máxima) de un punto a una circunferencia, es la longitud del menor (mayor) de los segmentos de normal comprendidos entre el punto y la circunferencia. Se presentan dos casos:

a) El punto es interior a la circunferencia.



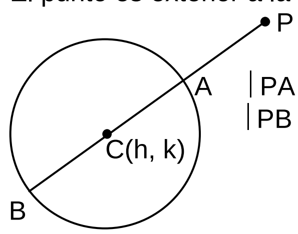
$|PA| = d(P, A)$

$|PB| = d(P, B)$

$|PA|$ = distancia mínima

$|PB|$ = distancia máxima

b) El punto es exterior a la circunferencia.



$|PA| = d(P, A)$

$|PB| = d(P, B)$

$|PA|$ = distancia mínima

$|PB|$ = distancia máxima

Ejemplos:

1. Determinar las ecuaciones de las rectas **L** que pasan por P(2, 3) y son tangentes a λ**:** $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$

Solución

Primero hallamos el centro y el radio de λ**,** para ello expresamos la ecua-ción en la forma normal:

$(\mathbf{x} - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5 \Rightarrow$ C(1, 1) ; r = 5

Ahora hallamos el número de soluciones: $d_{CP} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} = r$

entonces $P \in \lambda \Rightarrow$ 1 solución.

Luego hallamos la pendiente del segmento que une el punto (2, 3) y el centro de la circunferencia:

$m_{CP} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow m_{cp} \cdot m_T = -1$. De donde: $m_T = -\frac{1}{2}$ Con esta pendiente y el punto (2, 3)

Escribimos la ecuación de la recta **L**: $y - 3 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$

2. Determinar las ecuaciones de las rectas **L** que pasan por P(–2, 2) y son tangentes a **λ:** $x^2 + y^2 = 1$.

Solución

Hallamos el centro y el radio de **λ:** estos son: C(0, 0) y r = 1.

Ahora vemos el número de soluciones:

$$d_{CP} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} > r \Rightarrow$$

P es externo por tanto hay dos soluciones: **L,** pasa por P, entonces su ecuación es:

y – 2 = m(x + 2)

o sea: mx –y + 2(m + 1) = 0

La distancia del centro a la recta = r entonces:

$$\left| \frac{m(0) - 0 + 2(m+1)}{\sqrt{m^2+1}} \right| = 1$$

de aquí:

$$4(m+1)^2 = (\sqrt{m^2+1}) \Rightarrow$$

$4m^2 + 8m + 4 = m^2 + 1 \Rightarrow$

$3m^2 + 8m + 3 = 0$

de donde:

$m = -4 - \sqrt{7}$ o $m = -4 + \sqrt{7}$

Por tanto:

$y - 2 = (-4 - \sqrt{7})(x + 2)$ ó

$y - 2 = (-4 + \sqrt{7})(x + 2)$

3. Dada la circunferencia **C**: $x^2 + y^2 - 4x - 9 = 0$, hallar la longitud de la tan-gente a la circunferencia, trazada desde el punto Q(8, 8).

Solución

Hallamos el centro y el radio de la circunferencia para lo cual comple-tamos cuadrados, de donde se obtiene:

$(x - 2)^2 + y^2 = 13$, por tanto:

C(2 , 0) y $r = \sqrt{13}$

$d(Q, C) = \sqrt{(8-2)^2 + (8-0)^2} = 10$

Ahora aplicando: $t = \sqrt{d^2 - r^2}$, se tiene: $t = \sqrt{10^2 - (\sqrt{13})^2} = \sqrt{87}$

FAMILIA DE CIRCUNFERENCIAS

El método usado para hallar la familia de rectas servirá para hallar la ecuación de familias de circunferencias que pasen por las intersecciones de dos circunferencias. Para ello consideremos:

$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0$ (A)

$x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0$ (B)

y al tomar k como parámetro, la ecuación:

$(x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1) + k(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0$ (C)

Supongamos ahora que las ecuaciones A y B representan circunferencias que se intersecan en dos puntos. Entonces, si k es un parámetro, con $k \neq -1$, la ecuación C representa una familia de circunferencias que pasan por los puntos de intersección de las circunferencias dadas. Esto es cierto, pues las coordenadas de un punto de intersección, al sustituirlas por x e y, reducen la ecuación C a: 0 + k0 = 0. Si las circunferencias dadas son tangentes entre sí la ecuación C representa la familia de circunferencias que pasan por el punto de tangencia.

Ejemplo:

1. Escríbase la ecuación de la familia de circunferencias cuyos miembros pasan todos por la intersección de las circunferencias C_1 y C_2 representadas por las ecuaciones:

$C_1: \ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$

$C_2: \ x^2 + y^2 - 12x - 2y + 29 = 0.$

Además hállese el miembro de la familia C_3 que pasa por el punto (7, 0).

Solución

Poniendo a k como parámetro, se ex-presa la familia de circunferencias mediante la ecuación:

$(x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5) + k\,(x^2 + y^2 - 12x - 2y + 29) = 0$ (**)

Puesto que el punto (7, 0) pertenece a la familia, estas coordenadas se reemplaza en (**) y se obtiene:

$(49 - 42 + 5) + k(49 - 84 + 29) = 0$

$12 + k(-6) = 0$

$k = 2$

Para este valor de k, la ecuación (**) se reduce a:

$$3x^2 + 3y^2 - 30x - 2y + 63 = 0$$

o expresada en la forma normal:

$$C_3: \ (x-5)^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = \frac{37}{9}$$

Por tanto el miembro que se busca de la familia de circunferencias tiene su centro en $(5, 1/3)$ y radio igual a $37/2$.

2. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y por la intersección de las circunferencias:

C_1: $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$; y C_2: $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$

Solución
La circunferencia buscada es un miembro de la familia:

$x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 + k(x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11) = 0$

El valor del parámetro k se determina por la condición de que la circunferencia pasa por el origen de coordenadas. Por lo tanto el origen (0, 0) satisface la ecuación de la familia, esto es:

$$-15 + k(11) = 0$$

de donde k = 11/15

Sustituyendo este valor en la ecuación de la familia y simplificando, obtenemos:

$$26x^2 + 26y^2 + 6x + 142y = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

"Nada proporciona dignidad tan respetable ni independencia tan importante como el hábito de leer"

Marianao

48. Cuál es la forma canónica de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 11 = 0$?

a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 18$

b) $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 18$

c) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 18$

d) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 18$

49. Calcular la distancia entre los centros de las circunferencias:

C_1: $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$

C_2: $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 31 = 0$

a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{2}$

50. se tienen las circunferencias:

C_1: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$

C_2: $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 41 = 0$.

¿Cuál o cuáles de los siguientes puntos pertenecen a las circunferencias?

a) (7, 2) b) (–1, 2) c) (3, 6) d) (7, –4) e) (7, –1)

51. Se tienen las circunferencias:

C_1: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

C_2: $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 49 = 0$

Luego estas son:

a) Secantes solamente.

b) Tangentes

c) Tangentes ortogonales

d) Interiores

e) Secantes ortogonales

52. Calcular la longitud de la cuerda que la recta: y = 6 – x, determina al cortar a la circunferencia de centro (2, –1) y radio 5.

a) $7\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) 4

53. Una circunferencia de radio 5 unida-des y que tiene por centro (4, 3) ¿En cuántos puntos intercepta a los ejes cartesianos?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

54. En una circunferencia de radio 5 unidades y que tiene por centro en el punto (4, 3) ¿cuál es la menor longitud de la menor cuerda que se forma con la intersección de los ejes?

a) 10 b) 8 c) 6 d) 7

55. Se da la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$. Calcular el producto del valor de las ordenadas de una cuerda de abscisa 2, a la circunferencia.

a) –5 b) 5 c) 6 d) –6

56. Hallar la longitud de la cuerda que se forma cuando la circunferencia de centro C(1, –3) y radio $\sqrt{5}$ se intercepta con la recta x = 2.

a) 4 b) 3 c) 5 d) 6

57. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (2, 3) y es tangente al eje de las Y; en y = 1.

a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

b) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

c) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$

d) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$

58. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (5, 3) y es tangente al eje de las abscisas en x = 2.

a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$

b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$

c) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

d) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

59. La ecuación de una circunferencia tangente al eje de las abscisas es:

$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$. ¿Cuál es su intersección con el eje de la ordenadas?.

a) 4 b) 3 c) –3 d) –4

60. Determinar la ecuación general de la circunferencia de centro C(4, –2) y que es tangente al eje de las ordenadas.

a) $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 4 = 0$

61. Halle la ecuación de la recta que pasa por el centro de la circunferencia $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ y es perpendicular a la recta: 3x – 2y + 7 = 0.

a) 2x + 3y = 0 b) 3x + 2y = 0 c) 2x – 3y = 0 d) 3x – 2y = 0 e) 3x + 3y + 1 = 0

62. Cuál es el punto de la circunferencia $(x-4)^2+(y+3)^2=1$, que tiene ordenada máxima?

a) $(-4, -2)$ b) $(4, -2)$ c) $(2, -4)$ d) $(-2, -4)$ e) $(4, 3)$

63. Para que valores de m y k la ecuación: $mx^2+y^2+4x-6y+k=0$, representa una circunferencia?

a) $m = 1$ y $k > 13$

b) $m = -1$ y $k < 15$

c) $m = 1$ y $k < 13$

d) $m = -1$ y $k > 15$

64. Para que valores de m y k la ecuación $mx^2+2y^2+24x+24y-k=0$, representa una circunferencia?

a) $m = 2$ y $k > 144$

b) $m = -2$ y $k < -144$

c) $m = -2$ y $k > -144$

d) $m = 2$ y $k > -144$

65. Halle a, b y c de modo que la ecuación: $36x^2+ay^2+bxy+24x-12y+c=0$ represente una circunferencia.

a) $a = 36$, $b = 0$, $c > 5$

b) $a = -36$, $b = 0$, $c < 5$

c) $a = 36$, $b = 0$, $c < -5$

d) $a = 36$, $b = 0$, $c < 5$

66. Cuál debe ser la relación entre m, n y p para que la circunferencia de ecuación: $x^2+y^2-mx-ny+p=0$ pase por el origen?.

a) $p = 0$ y $m^2+n^2>0$

b) $p = 0$ y $m^2-n^2>0$

c) $p = 1$ y $m^2+n^2>0$

d) $p = 1$ y $m^2+n^2<0$

67. Cuál debe ser la relación entre: m, n y p, para que la circunferencia de ecuación: $x^2+y^2-mx-ny+p=0$ tenga centro en el origen de coordenadas?.

a) $m = n = 0$ y $p > 0$

b) $m = n = 0$ y $p < 1$

c) $m = n = 0$ y $p > 1$

d) $m = n = 0$ y $p < 0$

68. Un cuadrado tiene vértices consecutivos: A(3, 3) y B(4, 2). Determine la ecuación de una de las circunferencias circunscritas al cuadrado.

a) $(x+3)^2+(y-2)^2=1$

b) $(x-4)^2+(y+3)^2=1$

c) $(x-4)^2+(y-3)^2=1$

d) $(x-3)^2+(y+2)^2=1$

69. Cuál es la posición del punto P(3, 2) en relación a la circunferencia C_1: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$?

a) P es punto de la circunferencia.

b) P es un punto exterior.

c) P es un punto interior.

d) P es centro de la circunferencia.

e) No se puede determinar.

Halle la posición del punto P, en relación a la circunferencia λ en 70 - 72

70. P(–1, –4) ; λ: $x^2 + y^2 - 6x + 4y = -3$

a) P es punto de la circunferencia.

b) P es un punto exterior.

c) P es un punto interior.

d) P es centro de la circunferencia.

e) No se puede determinar.

71. P(1, 1); λ: $x^2 + y^2 + 2y - 80 = 0$

a) P es punto de la circunferencia.

b) P es un punto exterior.

c) P es un punto interior.

d) P es centro de la circunferencia.

e) No se puede determinar.

72. P(0, 0) y λ: $16x^2 + 16y^2 + 16\sqrt{2}\,x - 8y - 71 = 0$.

a) P es punto de la circunferencia.

b) P es un punto exterior.

c) P es un punto interior.

d) P es centro de la circunferencia.

e) No se puede determinar.

73. Determine "p" de modo que el punto A(7, 9) sea exterior a la circunferencia C: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - p = 0$.

a) $-2 < p < 98$ b) $-2 \leq p < 97$ c) $-2 < p \leq 98$ d) $-2 \leq p \leq 98$ e) $-1 < p < 99$

74. Calcular la distancia del centro de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 17$ a la recta de ecuación: $12x + 5y = 0$.

a) 14/13 b) 14 c) 13 d) 13/14

75. Para que valores de k, la recta x = k intercepta a la circunferencia $(x-3)^2 + y^2 = 25$ en puntos distintos?.

a) $-2 < k \leq 4$ b) $-1 < k \leq 6$ c) $-2 < k \leq 7$ d) $-2 < k \leq 8$ e) $-2 < k < 8$

76. Determine el producto de las coordenadas de los puntos P y Q donde la circunferencia C: $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8 = 0$ encuentra a la recta L, cuya ecuación es: $3x + 2y + 7 = 0$.

a) –15 b) 15 c) –5 d) 12

77. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el centro de la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = -1$ y es perpendicular a la recta de ecuación: $x + 2y - 14 = 0$.

a) $2x + y - 5 = 0$ b) $2x - y + 5 = 0$ c) $2x - y - 5 = 0$

d) $x - 2y - 5 = 0$ e) $x - 2y - 14 = 0$

78. Cuál es la longitud de la cuerda que la recta L: $7x - 24y - 4 = 0$ determina en la circunferencia, **λ:** $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$?.

a) 2 b) 4 c) 8 d) $4\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2}$

79. Dadas las circunferencias,

λ: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$, y

ψ: $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Hallar la suma de las coordenadas de sus puntos de intersección.

a) 0 b) 15 c) 8 d) 2

80. Las circunferencias de ecuación:

λ: $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 16 = 0$, y

ψ: $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$.

Se interceptan en los puntos A y B. Determine la distancia del centro de la circunferencia de mayor radio a la recta AB.

a) $3\sqrt{2}$ b) $6\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2}$

Hallar las ecuaciones de las rectas tan-gentes (L) a las circunferencias (λ) trazadas por P en los problemas 81 al 83:

81. λ: $x^2 + y^2 = 100$ y P(–6, 8)

a) $3x - 4y + 50 = 0$ b) $4x - 3y = -5$ c) $3x + 4y + 50 = 0$

d) $3x - 4y = 50$ e) $4x - 3y + 50 = 0$

82. λ: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 164$ y P(–3, 11)

a) $5x - 12y + 147 = 0$ b) $4x - 3y = 11$ c) $12x - 4y + 15 = 0$

d) $5x - 12y = 5$ e) $5x - 12y - 147 = 0$

83. λ: $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ y P(–1, 2)

a) $3x + 4y + 11 = 0$ ó $x - 1 = 0$

b) $3x - 4y + 11 = 0$ ó $x + 1 = 0$

c) $3x - 4y - 11 = 0$ ó $x - 1 = 0$

d) $4x - 3y + 11 = 0$ ó $x - 1 = 0$

e) $3x - 4y + 12 = 0$ ó $x + 2 = 0$

84. Hallar la ecuación de las rectas que pasan por Q(0, 9) y que es tangente a la circunferencia, **λ:** $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

a) $3x + 4y = -27$ ó $4x - 3y = 36$

b) $3x - 4y = -27$ ó $4x + 3y = 36$

c) $4x - 3y = 27$ ó $3x + 4y = -36$

d) $4x + 3y = -27$ ó $3x - 4y = 36$

e) $4x - 3y = -27$ ó $3x + 4y = 36$

85. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia **λ:** $x^2 + y^2 - 2x + y = 5$, que son paralelas a la recta, L: $3x + 4y = 1$

a) $3x - 4y = 27/2$ y $3x - 4y = -23/2$

b) $3x - 4y = 27/2$ y $3x + 4y = 23/2$

c) $3x + 4y = -27/2$ y $3x - 4y = 3/2$

d) $3x + 4y = 27/2$ y $3x + 4y = -23/2$

e) $3x + 4y = -27/2$ y $3x + 4y = -7$

86. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (–1, –3) que sea tangente a la recta que une los puntos (–2, 4) y (2, 1).

a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 15 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 15 = 0$

87. Hallar la máxima y mínima distancia del punto (10, 7) a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

a) 15 y 5 b) 15 y 7 c) 7 y 12 12 y 8 e) 15 y 12

88. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto P(7, 8) a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

a) $\sqrt{26}$ b) $2\sqrt{26}$ c) $3\sqrt{26}$ d) $4\sqrt{26}$ e) $5\sqrt{26}$

89. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto (6, 4) a la circunferencia de ecuación : $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0$.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 9 e) 12

90. Hallar el valor de k, para el cual la longitud de la tangente trazada des-de el punto (5, 4) a la circunferencia: $x^2 + y^2 + 2ky = 0$ sea igual a 1.

a) 5 b) 4 c) –4 d) –5

91. Hallar la distancia mínima del punto (3, 9) a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$.

a) 17 b) 15 c) 13 d) 31

92. Determinar la menor y la mayor distancia de la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$, a la recta: $8x - 15y + 80 = 0$

a) 1 y 5 b) 2 y 3 c) 1 y 2 d) 3 y 5 e) 1 y 3

93. La longitud de la tangente desde el punto P(a, –1) a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 17 = 0$ mide 8 unidades. Calcular el valor de a.

a) 10, –2 b) 6, –10 c) 10, –6 d) –6, –2

94. Calcular la potencia del punto P(–4, 9) relativa a cada una de las circunferencias: $x^2 + y^2 - 6x + 16y + 64 = 0$ y $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 19 = 0$.

a) –7 , 200 b) –7, 204 c) 204, 7 d) –15, 1

95. Desde el punto A(k+1, 1); $k < 0$ se trazan las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$. El segmento determinado por el punto de tangencia y el punto A mide $3\sqrt{2}$. Hallar las ecuaciones de las tangentes.

a) $x + 7y - 9 = 0 \ \wedge \ x - y - 3 = 0$

b) $x - 5y - 9 = 0 \ \wedge \ x + y - 3 = 0$

c) $x - 7y - 1 = 0 \ \wedge \ 2x - y + 3 = 0$

d) $x - 7y + 9 = 0 \ \wedge \ x - y + 3 = 0$

e) $x - 5y + 9 = 0 \ \wedge \ x - y + 1 = 0$

96. Hallar las ecuaciones de las tan-gentes trazadas del punto P(–2, 7) a la circunferencia: $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$

a) $2x - y + 11 = 0 \ \wedge \ x + 2y - 12 = 0$

b) $2x + y + 11 = 0 \ \wedge \ x + 2y + 12 = 0$

c) $2x - y + 10 = 0 \ \wedge \ x + 3y - 12 = 0$

d) $2x - y = 0 \ \wedge \ x - 10 = 0$

97. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 2$; cuyo radio es un tercio del radio de esta circunferencia.

a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$

b) $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 4$

c) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$

d) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 4$

98. Hallar la distancia mínima del punto (3, 9) a la circunferencia: $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$

a) 9 b) 26 c) 17 d) $\sqrt{17}$

99. Los extremos de un diámetro de una circunferencia C son los puntos (–3, –4) y B = (5, 8). La ecuación de C es:

a) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 47 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 47 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 47 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4 = 0$

100. Determinar el valor de k de modo que la recta: $x + 7y + k = 0$ sea tangente a C: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = -5$.

a) –1 ó 39 b) –1 ó 5 c) 39 ó 1 d) –39 ó 4