ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALITICA EN EL PLANO

"No importa que el vulgo me critique, si el tribunal de mi conciencia me absuelve"
Leonardo Cortez C.

OBJETO DE LA GEOMETRIA ANALÍTICA.

la Geometría Analítica estudia las propiedades de la formas geométricas (Líneas, figuras, cuerpos, superficies, etc.) mediante un método especial denominado **método de coordenadas**. Además, se aplica ampliamente el álgebra; en la geometría elemental se recurre a veces a métodos algebraicos como, por ejemplo, al determinar el área de un triángulo por los tres lados o al calcular el lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia, etc. sin embargo, el dominio de la aplicación de métodos algebraicos a la geometría ha devenido más exitoso desde que se introdujo el método de coordenadas, el cual no sólo hizo factible el estudio de la forma y las dimensiones de las formas geométricas sino también su posición en el plano o en el espacio.

1. SISTEMAS DE COORDENADAS.

Comenzaremos por presentar los sistemas de coordenadas más frecuentemente utilizados que son los sistemas cartesianos, así llamados en honor del filósofo y matemático francés René Descartes, nacido en 1596 y fallecido en 1650, quien concibió las ideas de resolver los problemas geométricos por la vía algebraica con simplicidad y elegancia, dando con ello un considera-ble y fuerte impulso al desarrollo de la matemática.

NOCIÓN DE EJE.

Sea $\mathbb{L}$ una recta, en ella tomemos dos puntos arbitrarios distintos, a los que denominaremos O y U. Convendremos en que el primero de éstos será la representación gráfica del número real O (cero) en $\mathbb{L}$ y el segundo, la representación gráfica del número real +1, situado también en $\mathbb{L}$. En estas condiciones la recta quedará **orientada** y se le llamará un **eje.** Al punto O lo llamaremos origen del eje y a U, lo llamaremos punto unidad.

La semirrecta orientada con origen en O, y que contiene a U, se llamará el semieje positivo; la semirrecta opuesta, orientada, se llamará: el semieje negativo. La unión de los dos semiejes será el eje $\mathbb{E}$.

Ahora veremos como es posible representar cada número real mediante un punto, único, del eje.

Sea X > 0; adoptando como unidad de longitud la del segmento OU, tomemos en el semieje positivo un punto P tal que la distancia a O sea X; este punto es único. Entonces P será la representación gráfica, sobre $\mathbb{E}$, de X.

Sea ahora X < 0. Tomemos, en el semieje negativo, un punto, M, tal que: la distancia de O a M es –X; este punto es único. Entonces, M será la representación gráfica, sobre $\mathbb{E}$, de X.

Si X = 0, el punto correspondiente es el origen. De este modo hemos hecho corresponder a todo número real un punto único del eje.

Recíprocamente, a todo punto del eje podemos hacer corresponder un núme-ro real único. Si el punto es O, éste número será cero. Si el punto P está en el semieje positivo, y la distancia de O a P, que denotaremos d(O,P), es igual a X, a P le haremos corresponder X.

Consideremos ahora M un punto del semieje negativo; si d(O, M) = X, a M le haremos corresponder –X.

Así pues queda establecida una biyección en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y el conjunto $\mathbb{E}$ de los puntos de un eje.

Si en un eje $\mathbb{E}$ se corresponden mutuamente el punto P y el número real X, entonces X se llamará la abscisa o coordenada de P. Escribiremos: P(X) y leeremos: El punto P, de abscisa X.

Observación.

Dos puntos P(X) y P'(X') son simétricos respecto al origen O si y sólo si X' = –X.

MEDIDA ALGEBRAICA DE UN SEGMENTO DE EJE.

Sean $A(X_A)$ y $B(X_B)$ dos puntos de un eje $\mathbb{E}$. Llamaremos medida algebraica o "distancia dirigida" del segmento de origen A y extremo B, al número real "$X_B - X_A$" , o sea a la diferencia entre la abscisa del extremo del segmento y la del origen. Tal medida algebraica se de-nota por $\overline{AB}$, es decir:

$$\boxed{d(A, B) = \overline{AB} = X_B - X_A}$$

Observe Ud. que la abscisa de un punto P es la medida algebraica del segmento de origen O y extremo P y que: $\overline{AB} = -\overline{BA}$; así mismo, que la distancia entre A y B viene dada por: $|X_B - X_A|$.

MAGNITUD DEL SEGMENTO:

Convengamos en llamar magnitud del segmento $\overline{AB}$ al número igual a su longitud, tomado con signo más, si la dirección del segmento coincide con el sentido positivo del eje, y con signo menos, si la dirección coincide con el sentido negativo del mismo.

La magnitud del segmento $\overline{AB}$ la indicaremos con la notación **AB** (en negrita, y sin rayita). No excluimos el caso en que los puntos A y B coincidan; entonces se dice que el segmento $\overline{AB}$ es nulo, ya que su magnitud **AB** es igual a cero, y por lo tanto, llamar a tal segmento dirigido, se puede sólo condicionalmente.

La magnitud del segmento, a diferencia de su longitud, es un número relativo; es obvio que la longitud del segmento es igual al módulo de su magnitud (módulo tiene igual significado que valor absoluto); y de acuerdo con el método establecido en el álgebra para la denotación del módulo de un número para indicar la longitud del segmento $\overline{AB}$, emplearemos la notación $|AB|$. Es evidente que $|AB|$ y $|BA|$ indican un mismo número. En cambio, las magnitudes **AB** y **BA** se diferencian en signo, es decir:

$$\mathbf{AB} = -\,\mathbf{BA}$$

RELACIÓN DE CHASLES PARA TRES PUNTOS DE UN EJE.

Si A, B y C son tres puntos cualesquiera de un eje $\mathbb{E}$, entonces se cumple que:

$$AB + BC + CA = 0.$$

Nota: La igualdad AB + BC + CA = 0, **se llama relación de Chasles.**

Consecuencia:

Si A y B son dos puntos de un eje $\mathbb{E}$, entonces, para todo punto M de $\mathbb{E}$, se tiene:

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{MB} - \overline{MA}}$$

ABSCISA DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.

Siendo $A(X_A)$ y $B(X_B)$ dos puntos del eje **E**; el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es el punto M de **E**, tal que: $\overline{AM} = \overline{MB}$.

Las coordenadas del punto M; son: Así: $\overline{AM} = \overline{MB}$; entonces: $X_M - X_A = X_B - X_M$ de donde:

$$\boxed{X_M = \frac{X_A + X_B}{2}}$$

SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES EN EL PLANO.

Un sistema de coordenadas rectangulares en el plano consta de dos ejes perpendiculares con un origen común. A este se le llama origen del sistema y a los ejes, se les llama ejes coordenados. Al eje “horizontal” se le llama eje de “abscisas” y al eje vertical eje de “ordenadas”. El sistema se denota por XY o por XOY. Los ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, que se suelen enumerar, en sentido antihorario, tal como en la figura:

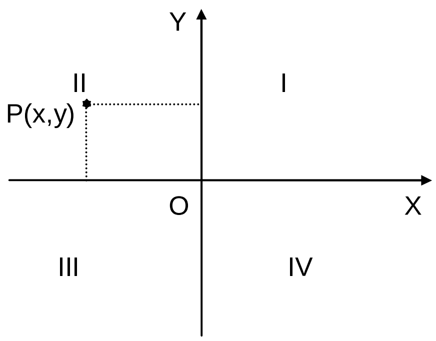


figura 1

COORDENADAS DE UN PUNTO EN UN PLANO.

Sea P un punto del plano (fig. 1). Proyectamos el punto P ortogonalmente sobre OX y OY; sean P_1 y P_2 las proyecciones respectivas, “x” la coordenada de P_1 en OX y “y” la coordenada de P_2 en OY. Los números “x” y “y” se llaman las coordenadas del punto P en el sistema adoptado; “x” se llama la abscisa y “y” la ordenada de P. Luego pondremos P(x, y).

Si denotamos por $\mathbf{R}^2$ el conjunto de todos los pares ordenados de números reales, de todo lo anterior se desprende que a todo punto del plano le correspon-de un elemento único de $\mathbf{R}^2$ y recíproca-mente, a todo elemento (x,y) de $\mathbf{R}^2$ le podemos hacer corresponder un punto único del plano. En efecto: Sean $P_1(x)$ en OX y P_2 en OY. Trazando por P_1 la perpendicular a OX, y por P_2 la perpendicular A a OY, ambas se cortan en un plano único P cuya abscisa es “x” y su ordenada “y”.

Por tanto ha quedado establecida una biyección entre el conjunto $\mathbf{R}^2$ y el conjunto de los puntos del plano. Notemos que el punto $P_1(x)$ en el eje X, en el sistema XY se identifica por $P_1(x,0)$. De modo análogo, el punto $P_2(x)$ del eje Y, se identifica por $P_2(0,y)$ en el sistema XY.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL PLANO.

a) Si los puntos están sobre el eje de abscisas.

Sean M_1 y M_2 dos puntos de $\mathbf{R}^2$ y O el origen de coordenadas. Hay seis casos posibles de ubicación de los puntos M_1 y M_2 entre sí y respecto al origen O. (sobre el eje de abscisas). Así tenemos:

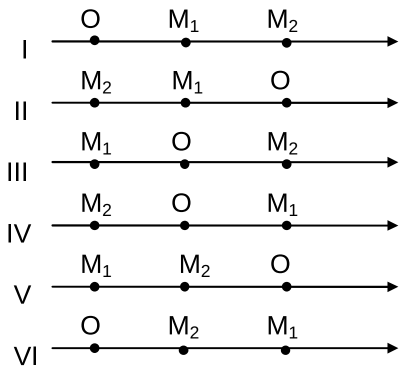


figura 2

En los casos I y II , se tiene:

$$OM_1 + M_1 M_2 = OM_2$$

de aquí que:

$$M_1 M_2 = OM_2 - OM_1$$

pero $OM_1 = x_1$ y $OM_2 = x_2$, por o tanto en ambos casos resultará:

$$\boxed{M_1 M_2 = x_2 - x_1}$$

En los casos III y IV, se tiene:

$$M_1O + OM_2 = M_1M_2$$

pero $M_1O = OM_1 = - x_1$; $OM_2 = x_2$

por lo que:

$$\boxed{M_1M_2 = x_2 - x_1}$$

En los casos V y VI, se tiene:

$$M_1 M_2 + M_2O = M_1O \ ;$$

de donde resulta:

$$M_1M_2 = M_1O - M_2O \qquad ó \qquad M_1M_2 = OM_2 - OM_1$$

puesto que:

$M_1O = -OM_1$ y $M_2O = -OM_2$. Pero como $OM_2 = x_2$ y $OM_1 = x_1$, se tiene:

$$\boxed{M_1 M_2 = x_2 - x_1}$$

En el caso particular, cuando el origen del segmento coincide con el de coordenadas ($x_1 = 0$), la expresión:

$$M_1M_2 = x_2 - x_1 \quad \text{ó} \quad (M_1M_2 = y_2 - y_1),$$

muestra que la magnitud del segmento es la coordenada de su extremo.

Ejemplos:

1. La magnitud del segmento que tiene como origen y extremo los puntos $M_1(3,0)$ y $M_2(5,0)$ es: $M_1M_2 = 5 - 3 = 2$
2. Sean los puntos $M_1(-3,0)$ y $M_2(-5,0)$ entonces: $M_1M_2 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$.
3. Sean los puntos $M_1(0, -2)$ y $M_2(0,3)$ entonces: $M_1M_2 = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$

b) caso en que: AB // OX ó AB // OY

La magnitud del segmento AB que es paralelo al eje de las abscisas (o de las ordenadas) es igual a la diferencia entre las abscisas (ordenadas) del extremo y del origen del segmento, es decir:

$\boxed{AB = x_2 - x_1}$ $\boxed{AB = y_2 - y_1}$ (1)

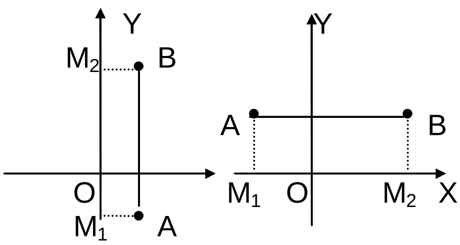


figura 3

Observación:

Si nos interesa solamente la longitud del segmento AB, siéndonos indiferente su dirección, el número obtenido por medio de la fórmula (1) hay que tomarlo en su valor absoluto, es decir:

long de AB = $|x_2 - x_1|$ ó long de AB = $|y_2 - y_1|$

c) Caso en que AB no es paralela a los ejes cartesianos.

Si el segmento AB no es paralelo a ninguno de los ejes de coordenadas, su magnitud es igual a la longitud del mismo.

Sean los puntos $A(x_1 , y_1)$ y $B(x_2 , y_2)$ de R^2.

Trazamos AC // OX y BC // OY de tal manera que:

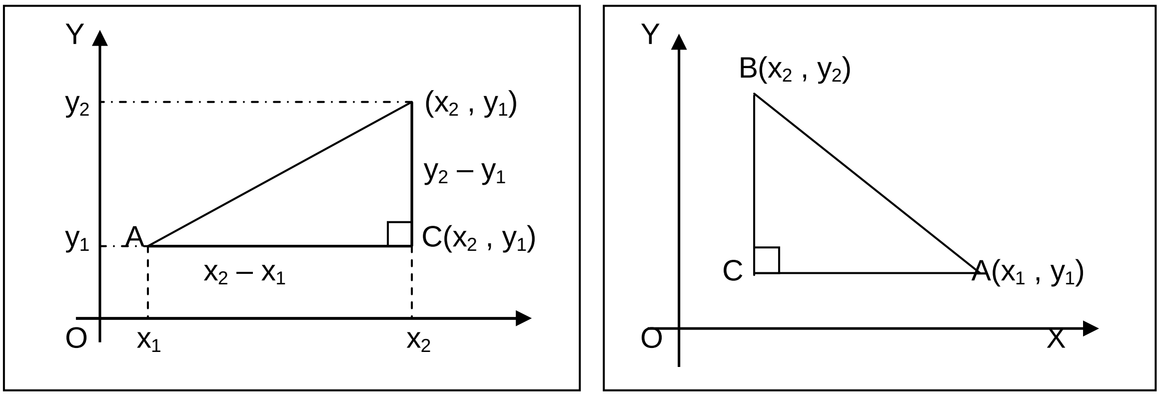


figura 4

tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} AC // OX \Rightarrow y_C = y_1 \\ BC // OY \Rightarrow x_C = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow C(x_2, y_1)$$

De donde:

$$d_{AC} = |x_C - x_A| = |x_2 - x_1|$$

$$d_{BC} = |y_B - y_C| = |y_2 - y_1|$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC, se tiene:

$d^2 = (d_{AC})^2 + (d_{BC})^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$

Aplicando propiedades del valor absoluto se tiene:

$d^2 = (d_{AC})^2 + (d_{BC})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

entonces:

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Observación:

El orden de los términos en las diferencias de abscisas y ordenadas no influyen en el cálculo de la distancia d. es decir: $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

donde:

$\Delta x = x_2 - x_1$ ó $\Delta x = x_1 - x_2$

$\Delta y = y_2 - y_1$ ó $\Delta y = y_2 - y_1$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar las coordenadas de la proyección sobre el eje OX de los puntos: A(3, 4) y B(–5, –3)

Solución

En el esquema siguiente ubicamos los puntos A(3,4) y B(–5, –3); luego los puntos simétricos respecto del eje OX son: A_1(–3, –4) y B_1(5,3) .

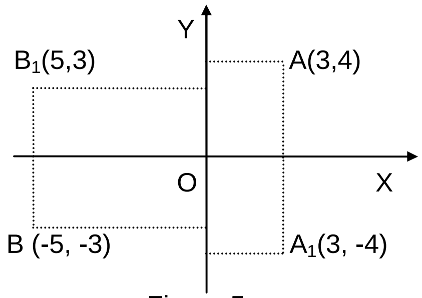
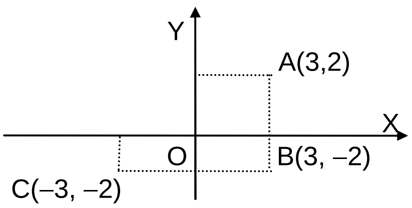


Figura 5

Así A_1 y B_1 son los simétricos de A y B.

2. Dado el punto A(3,2). Hallar las coordenadas del punto B, simétrico al A, respecto al eje OX, y del punto C simétrico al B respecto al eje OY.

Solución



Las coordenadas del punto B, simétrico al punto A, respecto al eje OX, es: B(3,-2); y las coordenadas del punto C, simétrico al punto B es: C(-3,-2).

3. Dados los puntos A(4a – 7) y B(–3a+2); determinar "a" para que $\overline{AB}$ sea igual a –5.

Solución

$\overline{AB}$ = (–3a + 2) – (4a – 7) = –7a + 9 = –5 $\Rightarrow$ $\overline{AB}$ = 2

4. Si A(a – 1); B(a + 1); C(2a + 1); D(3a – 1); E(3a) y P son puntos del eje coordenado OX. Hallar la abscisa de P de tal manera que:

$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP} = \overline{PE}$

Solución

Sea x la abscisa de P, entonces:

$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}=\overline{PE} \Leftrightarrow$ (x– a + 1) + (x– a – 1) + (x–2a –1) + (x – 3a + 1) = 3a – x

$\Leftrightarrow$ 5x = 10 $\Leftrightarrow$ x = 2a.

Por tanto la coordenada de P, es P(2a)

5. Calcular la distancia entre los puntos A(a – 2, b + 8) y B(a + 4, b).

Solución

Usamos:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ de donde:

$d = \sqrt{(a + 4 - (a-2))^2 + (b - (b+8))^2}$ $d = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$

d = 10

6. Probar que el triángulo cuyos vértices son A(2, 2); B(–4, –6) y C(4, –12) es rectángulo.

Solución

Para demostrar que un triángulo es rectángulo basta probar que las medidas de sus lados verifican el teorema de Pitágoras.

$d^2_{AB} = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ = (2 + 4)2 + (2 + 6)2 = 100

$d^2_{BC} = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ = (4 + 4)2 + (–6 + 12)2 = 100

$d^2_{CA} = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ = (2 – 4)2 + (2 + 12)2 = 200

Entonces se verifica que:

$d^2_{CA} = d^2_{AB} + d^2_{BC}$

7. Si P(x, y) equidista de los puntos A(–3, 7) y B(4, 3); ¿cuál es la relación existente entre “x” y “y“?

Solución

d(PA) = d(PB) $\Rightarrow (x + 3)^2 + (y – 7)^2 = (x – 4)^2 + (y – 3)^2$

Entonces:

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9$

(6x – 14y + 49) – (–8x + 16 – 6y) = 0

14x – 8y + 33 = 0

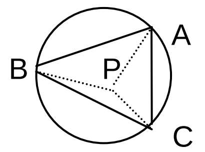
Rpta: La relación entre “x” y “y” está dada por: 14x – 8y + 33 = 0.

8. Dados los puntos (8, 11); B(-4, -5) y C(-6, 9); obtenga usted el circuncentro del triángulo ABC.

Solución

El circuncentro (centro de la circunferencia circunscrita al triángulo) es un punto P, equidistante de los tres vértices.

Así tenemos:



$$P(x, y): \begin{cases} 1)\ d_{PA} = d_{PB} \\ 2)\ d_{PB} = d_{PC} \end{cases}$$

1) $(x - 8)^2 + (y - 11)^2 = (x + 4)^2 + (y + 5)^2$

$x^2 - 16x + 64 + y^2 - 22y + 121 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 10y + 25$

de donde: $3x + 4y = -144$ (1)

2) $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = (x + 6)^2 + (y - 5)^2$

$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 10y + 25 = x^2 + 12x + 36 + y^2 - 18y + 81$

de donde: $x - 7y = -19$ (2)

De (2) tenemos: $x = 7y - 19$, que sustituido en (1) nos da:

$3(7y - 19) + 4y = 18 \Rightarrow 25y = 75 \Rightarrow y = 3$

ahora $x = 7(3) - 19 = 21 - 19 \Rightarrow x = 2$

Luego: P(2, 3) es el circuncentro del triángulo ABC.

9. Dados los puntos B(2, 3) y C(–4, 1); determine el vértice A del triángulo ABC, sabiendo que el punto A, esta sobre el eje “y” ; y forma un ángulo recto sobre el lado BC.

Solución

De acuerdo a los datos del problema se tiene:

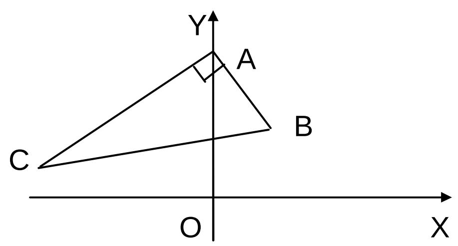


Fig. 7

$$A(x, y): \begin{cases} 1)\ A \in y \\ 2)\ AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ x = 0 \\ 2)\ d_{AC}^2 + d_{AB}^2 = d_{BC}^2 \end{cases}$$

De (2) tenemos:

$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (2 + 4)^2 + (3 - 1)^2$

Teniendo que cuenta que el punto A está sobre el eje "y" (x = 0), se tiene:

$16 + (y^2 - 2y + 1) + 4 + (y^2 - 6y + 9) = 36+4$

De donde:

$2y2 - 8y - 10 = 0 \Rightarrow y2 - 4y - 5 = 0$

entonces: $y = -1$ ó $y = 5$

Como en el problema se nos indica que el ángulo recto está sobre el lado BC, entonces sólo aceptamos como valor posible: y = 5. Por lo tanto las coordenadas del punto A, es: A(0, 5).

10. Las raíces reales de la ecuación: $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$ son los extremos de un segmento orientado AB, siendo $x_A > x_B$. Hallar la abscisa del punto C que divide al segmento dado en la razón: $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{7}$.

Solución

Las raíces reales de la ecuación:

$x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$

$(x + 2)(x - 3)(x^2 + 1) = 0$

Por tanto las raíces reales son: $x = -2$ y $x = 3$.

Luego: $x_A = 3$ y $x_B = -2$.

Como la razón $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{7}$, entonces: $\frac{C - A}{B - C} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{C - 3}{-2 - C} = \frac{3}{7}$.

De donde: $7c - 21 = -6 - 3c \Rightarrow c = 1.5$

11. Hallar las distancias: a) dirigidas y b) no dirigidas entre los puntos $P_1(-2)$ y $P_2(-7)$.

Solución

De acuerdo a la medida algebraica de un segmento se tiene:

a) $\overline{P_1P_2} = P2 - P1 = -7 - (-2) = -5$.

b) $|P_1P_2| = |P_2 - P_1| = |-7 - (-2)| = 5$.

12. La longitud del segmento orientado AB es igual a $6\sqrt{5}$; su origen está en el punto (3,–2) y su proyección sobre el eje de abscisas es –12. Hallar las coordenadas de los extremos de este segmento, sabiendo que forma con el eje de ordenadas:

a) Un ángulo agudo.

b) Un ángulo obtuso.

Solución

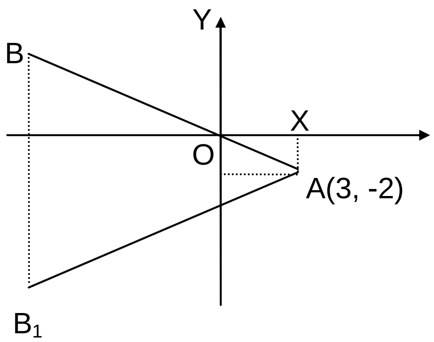


Figura 8

Puesto que la proyección de AB sobre el eje X es -12, entonces se tiene:

$\text{Proy}_X AB = x_B - x_A$

$-12 = xB - 3 \Rightarrow xB = -9$

Ahora como la distancia de AB = $6\sqrt{5}$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = 6\sqrt{5}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(-9-3)^2 + (y_B + 2)^2} = 6\sqrt{5}$$

$$= \sqrt{12^2 + (y_B + 2)^2} = 6\sqrt{5}$$

= 144 + (yB + 2)2 = 36(5)

= (yB + 2)2 = 36.

De donde: $y_B = 4$ ó $y_B = -8$

Por lo tanto a) B(–9, 4) ; b) B(–9, –8)

13. El segmento que une los puntos A(–2) y B(4) se prolonga hasta un punto P(x), de modo que $\overline{AP} = 3\overline{BP}$. Hallar las coordenadas del punto P.

Solución

Como: $\overline{AP} = 3\overline{BP} \Rightarrow$ P – A = 3(P – B)

$\Rightarrow$ P – A = 3(P – B)

$\Rightarrow$ x – (–2) = 3(x – 4)

$\Rightarrow$ x + 2 = 3x – 12 $\Rightarrow$ x = 7 $\Rightarrow$ P(x) = 7

14. Si $A(x_1)$ y $B(x_2)$ son los extremos de un segmento orientado no nulo y C(x) es un punto que lo divide, según la razón $r = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$, con r ≠ –1 y B ≠ C; entonces probar que: $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$

Solución

Como $r = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$, se tiene: $r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$

Luego: $x - x_1 = r(x_2 - x)$

$x - x_1 = rx_2 - rx \;\Rightarrow\; x + rx = rx_2 + x_1$

De donde: $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA.

Sean los puntos $A(x_1 , y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ de la figura, el punto $M(x, y)$ divide al segmento AB en la razón: $r = \dfrac{AM}{MB}$

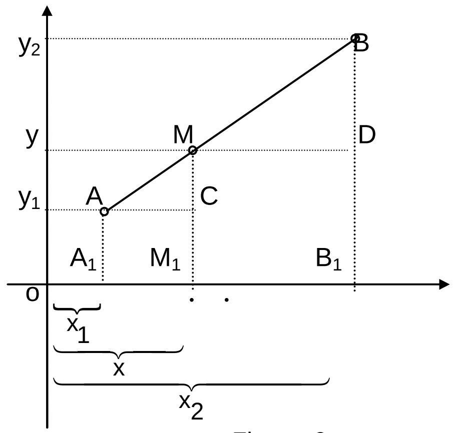


Figura 9

Desde los puntos A, M y B bajamos AA_1; MM_1 y BB_1 perpendiculares al eje OX y trazamos las rectas AC//OX y MD//OX. Como los triángulos AMC y MBD son semejantes, tendremos:

$$\frac{AC}{MD} = \frac{CM}{DB} = \frac{AM}{MB} = r \qquad (1)$$

Pero:

$$\left.\begin{array}{r} AC = A_1M_1 = OM_1 - OA_1 = x - x_1 \\ MD = M_1B_1 = OB_1 - OM_1 = x_2 - x \\ CM = M_1M - M_1C = M_1M - A_1A = y - y_1 \\ BD = B_1B - B_1D = B_1B - M_1M = y_2 - y \end{array}\right\} \mathbf{(2)}$$

Sustituyendo (2) en (1), obtendremos:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r \qquad (3)$$

Entonces de la igualdad (3) obtendremos las ecuaciones:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r \qquad (4)$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = r \qquad (5)$$

Despejando “x” y “y” de las ecuaciones (4) y (5) tendremos:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \qquad (6)}$$

Nota: Las fórmulas (6) sirven para determinar las coordenadas del punto M(x, y) que divide en la razón “r” el segmento comprendido entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

Observaciones:

1. Siendo “r” el cociente entre las medidas algebraicas de $\overline{AB}$ y de $\overline{BC}$, tenemos:

a) Si $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen el mismo sentido, entonces la razón $r > 0$.

b) Si $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen sentidos opuestos, entonces la razón $r < 0$

2. En el caso particular de **división del segmento por la mitad,** es decir, en la razón **r = 1**, se tiene que las coordenadas del centro del segmento es:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (7)}$$

3. Si en las fórmulas (6) se sustituye “r” por la razón $\frac{m}{n}$, obtendremos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{n + m} \\ y = \dfrac{ny_1 + my_2}{n + m} \end{cases} \qquad (8)$$

Las fórmulas (8) se emplean frecuentemente para determinar la posición del centro de gravedad de un cuerpo homogéneo o para hallar el centro de fuerzas paralelas.

CONDICIÓN PARA EL ALINEAMIENTO DE TRES PUNTOS.

Tres puntos $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$; son colineales si y sólo sí sus coordenadas verifican la igualdad:

$$\boxed{(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)}$$

Observación:

La condición para el alineamiento de tres puntos dada por:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1);$$

puede ser expresada de una forma mas simple de memorizar, veamos:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = 0$$

desarrollando:

$$x_2y_3 - x_2y_2 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_3y_2 + x_3y_1 + x_2y_2 - x_2y_1 = 0$$

de donde:

$$x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0$$

Expresión que podemos escribirla en forma de determinante, así:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

AREA DE UN TRIÁNGULO

Calcularemos el área del triángulo ABC siendo $A_1(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ de la figura siguiente:

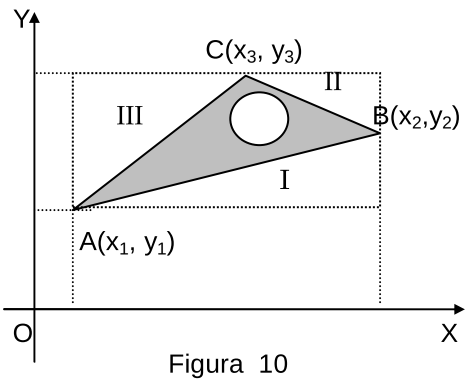


Figura 10

Designando por A_Δ el área del triángulo se obtiene:

$$A_\Delta = A\ ADEF - A_\Delta\, \mathrm{I} - A_\Delta\, \mathrm{II} - A_\Delta\, \mathrm{III}$$

Teniendo en cuenta que el cuadrilátero ADEF, es un rectángulo y los triángulos I, II, y III son triángulos rectángulos se tiene:

$$A_\Delta = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 - y_2) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)$$

Efectuando los productos y las reducciones correspondientes se obtiene:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\left(x_2y_3 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2 + x_3y_1\right)$$

Finalmente factorizando por partes se tiene:

$$A = \frac{1}{2}\left[(x_3 - x_2)y_1 + (x_1 - x_3)y_2 + (x_2 - x_1)y_3\right]$$

La expresión anterior corresponde al desarrollo del determinante:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$; o bien:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\begin{array}{|cc|} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \hline \end{array}$$
$$\quad x_1 \quad y_1$$

Los productos de izquierda a derecha son positivos y los de derecha a izquierda negativos

Nota: El área de un polígono convexo está dado por:

$$A_p = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{vmatrix} = (x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - \cdots - y_nx_1)$$

Observación: El área de un triángulo también se puede encontrar con:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

“Aquel que en su juventud, no haya tenido dificultades que vencer, ni penalidades que sufrir... ha perdido una gran enseñanza”.

1. ¿Son colineales los puntos A(–1, 1); B(1, 3) y C(7, 9)?

Solución

Para que los puntos A, B y C sean colineales debemos verificar:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$. Luego entonces: $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 9 + 7 - 21 + 9 - 1 = 0$$

Luego entonces los puntos A, B y C son colineales.

2. Para que valores de "x" los puntos A(x, x); B(3, 1) y C(7, –3) son colineales?.

Solución

Si A, B y C son colineales se cumple que:

$\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Desarrollando por menores complementarios la primera fila se tiene: $x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 0$

De donde desarrollando se tiene: 8x - 16 = 0 $\Rightarrow$ x = 2.

3. Determine "y" para que los puntos A(3, 5); B(-3, 8) y C(4, y) sean colineales.

Solución

Para que A, B y C sean colineales se cumple: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \\ 4 & y & 1 \end{vmatrix} = 0$. De donde:

4(5 - 8) - y(3 + 3) + (24 + 15) = 0

-12 - 6y + 39 = 0

Luego: y = $9/2$

4. Si A(0, a); B(a, -4) y C(1, 2); para que valores de "a" existe el triángulo ABC?.

Solución

Existe el triángulo ABC, si $a \in \mathbb{R}$; y los puntos A, B y C no son colineales. Sabemos que tres puntos son colineales si se cumple:

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$; reemplazando los valores dados tenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ a & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} a & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

esto es: –a(a –1) + (2a + 4) = 0 $\Rightarrow$ a^2–3a – 4 = 0

donde: a = –1 ó a = 4.

Luego los valores que puede tomar "a" para que exista el triángulo ABC, debe ser cualquier número real diferente de –1 y 4.

5. Obtener las coordenadas del punto C de la recta que pasa por A y B, sabiendo que A = (1, 5) ; B = (4, 17) y $r = \frac{AC}{CB} = 2$.

Solución

Sean C = (x_3, y_3). Luego tenemos:

$$\frac{AC}{CB} = 2 \Rightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = 2\,; \Rightarrow x_3 - 1 = 8 - 2x_3 \Rightarrow x_3 = 3$$

Del mismo modo:

$$\frac{AC}{CB} = 2 \Rightarrow \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} = 2 \Rightarrow y_3 - 5 = 34 - 2y_3 \Rightarrow y_3 = 13.$$

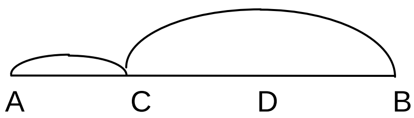
Entonces: C (3, 13)

6. Determine las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales, sabiendo que A = (–1, 7) y B = (11, –8).

Solución

Sean los puntos C y D puntos de división del segmento AB.

a) Calculamos el punto C:



Comencemos con la razón: $r = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = r \Rightarrow x_C = \frac{x_A + r\,x_B}{1 + r}$$

$$\Rightarrow x_C = \frac{(-1) + \frac{1}{2}(11)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = 3$$

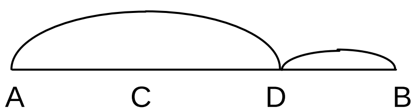
De igual modo:

$$\frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = r \Rightarrow y_C = \frac{y_A + r\,y_B}{1 + r}$$

$$\Rightarrow y_C = \frac{(7) + \frac{1}{2}(-8)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{6}{2}}{\frac{3}{2}} = 2$$

Aquí C(3, 2)

b) Calculamos ahora el punto D:



Comencemos con la razón: $k = \dfrac{AD}{DB} = 2$

Ahora:

$$\frac{x_D - x_A}{x_B - x_D} = k \Rightarrow x_D = \frac{x_A + k\,x_B}{1+k} \Rightarrow x_D = \frac{(-1)+2(11)}{1+2} = \frac{21}{3} = 7$$

De igual modo:

$$\frac{y_D - y_A}{y_B - y_D} = k \Rightarrow y_D = \frac{y_A + ky_B}{1+k} \Rightarrow y_D = \frac{7+2(-8)}{1+2} = \frac{-9}{3} = -3$$

Luego: D(7,-3)

Nota: Observe que D se puede calcular también como punto medio del segmento BC, usando la fórmula:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \;;\; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

7. Los extremos de un segmento son A(–2, –5) y B(7, 7). Determinar un punto C que divide al segmento AB en la razón 4 es a 5.

Solución

Sea C(x, y); consideremos la expresión, $x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{n+m}$; $y = \dfrac{ny_1 + my_2}{n+m}$

para hallar las coordenadas del punto C, donde m =4, y n = 5. (r = 4/5).

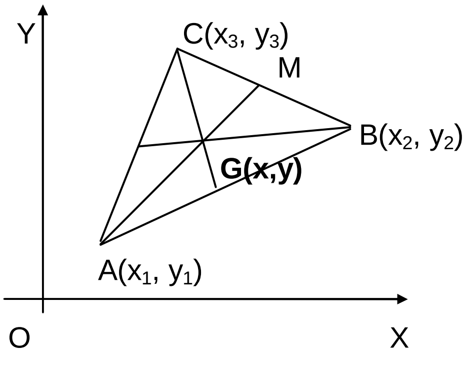
Luego: $x = \dfrac{5(-2)+4(7)}{5+4}$; $y = \dfrac{5(-5)+4(7)}{5+4}$

x = 2 ^ $y = 1/3$

8. Si los vértices de un triángulo son A(x_1, y_1); B(x_2, y_2) y C(x_3, y_3) demostrar que las coordenadas (x, y) de su baricentro o centroide, están dadas por:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \;;\; y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Solución



Sabemos que el baricentro o centroide de un triángulo es la intersección de sus medianas; así mismo el punto M (de la figura) es el punto medio del lado BC, la relación entre AG y GM es de 2 a 1, esto es: $\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$.

Como M es punto medio sus coordenadas son: $M\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$; y G(x, y)

teniendo en cuenta las ecuaciones: $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$; $y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$

se tiene: $x = \frac{x_1 + 2(\frac{x_2 + x_3}{2})}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

Del mismo modo hallamos "y": $y = \frac{y_1 + 2(\frac{y_2 + y_3}{2})}{1+2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

De donde: $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

9. Calcular la longitud de la mediana AM del triángulo ABC, cuyos vértices son los puntos: A(0, 0); B(3, 7) y C(5, –1).

Solución

El punto M, es punto medio del segmento BC por tanto:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7 + (-1)}{2} = 3$$

Luego la longitud de la mediana AM está dado por la distancia:

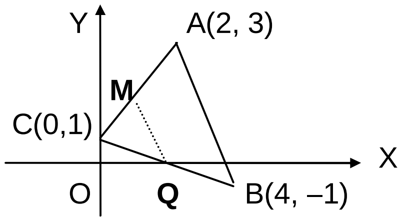
$$d_{AM} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$$

$$d_{AM} = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16 + 9} \Rightarrow d_{AM} = 5$$

10. Los puntos: A(2, 3); B(4, –1) y C(0, 1), determinan el triángulo ABC. Por el punto Q(12/5, –1/5) que pertenece al lado BC se traza una paralela al lado AB que corta al lado AC en el punto M. Hallar las coordenadas de M.

Solución

Como QM // AB, entonces utilizamos una consecuencia del teorema de Thales: "Toda paralela a un lado de un triángulo determina, en los otros dos segmentos proporcionales"; así :



$\dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{CM}{MA} = r$. De donde: $r = \dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{Q - C}{B - Q} = \dfrac{\frac{12}{5} - 0}{4 - \frac{12}{5}} = \dfrac{3}{2}$

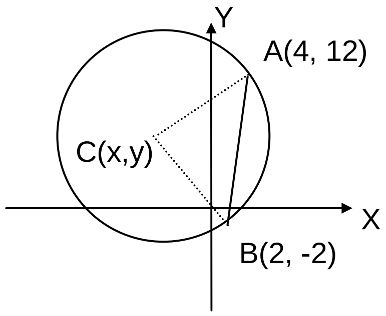
Ahora aplicando la expresión: $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$; $y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}$

se tiene: $x = \dfrac{0 + (\frac{3}{2})(2)}{1 + \frac{3}{2}} = \dfrac{6}{5}$; $y = \dfrac{1 + \frac{3}{2}(3)}{1 + \frac{3}{2}} = \dfrac{11}{5}$ De donde: $M = (x, y) = (\dfrac{6}{5}, \dfrac{11}{5})$

11. Los puntos A(4, 12) y B(2, –2) son los extremos de una cuerda de una circunferencia de radio igual a 10cm. Determinar el centro de dicha circunferencia, sabiendo que la abscisa es negativa.

Solución

Llamando C(x, y) al centro de la circunferencia que pasa por los puntos A y B, entonces se tiene: d(B, C) = d(A, C). Tal como se muestra en la figura siguiente:



d(B, C) = d(A, C)

$\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-12)^2}$ De donde: x - 7y = 38 (1)

De otro lado: d(A, C) = 10

$\sqrt{(x-4)^2 + (y-12)^2} = 10$

Efectuando se tiene: $x^2 + y^2 - 8x - 24y + 60 = 0$ (2)

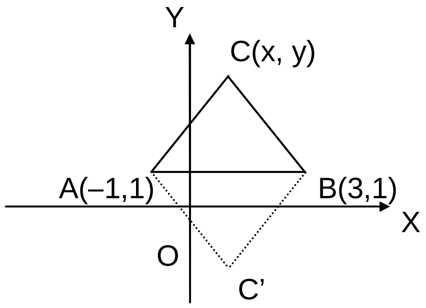
Resolviendo (1) y (2) nos da: x = 10 ó x = –4 y además: y = 4 ó y = 6

Descartamos el valor x = 10, entonces: C(–4, 6) son las coordenadas del centro.

12. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los A(–1, 1); B(3, 1). Hallar las coordenadas del tercer vértice.

Solución

Sea la figura:



d(A, B) = $\sqrt{(3-(-1))^2+(1-1)^2} = 4$

Como el triángulo ABC, es equilátero:

$$d(B, C) = d(A, C)$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$(x - 3)^2 = (x - 1)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2x + 1$$

$$x = 1$$

Ahora: d(B, C) = d(A, B)

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = 4$$

$$(1 + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

$$(y - 1)^2 = 12$$

De donde: $y = 1 + 3\sqrt{2}$ ó $y = 1 - 3\sqrt{2}$

Por tanto existe dos soluciones posibles:

C(1, 1 + $3\sqrt{2}$) ó C’(1, 1 – $3\sqrt{2}$)

13. Determinar los vértices B y C de un triángulo equilátero ABC, sabiendo que el punto medio del lado AB es M($\sqrt{3}$, 1) y A está en el origen de coordenadas cartesianas.

Solución

a) Para obtener B, usamos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{0 + x_B}{2}.$$ De donde: $x_B = 2\sqrt{3}$

Calculamos la ordenada “y”:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{0 + y_B}{2}$$ De donde : $y_B = 2$

b) Calculamos C:

$$d_{AB} = \sqrt{(2\sqrt{3} - 0)^2 + (2 - 0)^2} = 4$$

$$C(x, y) = \begin{cases} 1)\ d_{AB} = 4 \\ 2)\ d_{BC} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ (x-0)^2 + (y-0)^2 = 16 \\ 2)\ (x - 2\sqrt{3})^2 + (y-2)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ x^2 + y^2 = 16 \\ 2)\ x^2 + y^2 - 4\sqrt{3} - 4y = 0 \end{cases}$$

De (1) y (2) resulta: $16 - 4\sqrt{3}x - 4y = 0 \Rightarrow y = 4 - \sqrt{3}x$ (3)

Que sustituida en (1) da: $x^2 + (4-\sqrt{3}x)^2 = 16$.

$x^2 + 16 - 8\sqrt{3}x + 3x^2 = 16 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 2\sqrt{3}$

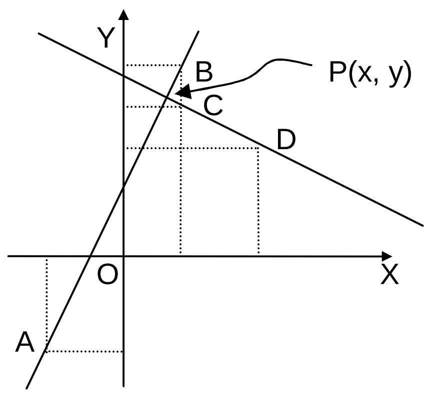
Reemplazando en (3) se obtiene: $y = 4$ ó $y = -2$; respectivamente.

Por lo tanto: $B(2\sqrt{3}, 2)$ y $C(0, 4)$ ó $C(2\sqrt{3}, -2)$.

14. Dados los puntos A(–3, 4); B(2, 9); C(2, 7) y D(4, 5); obtener la intersección de las rectas AB y CD.

Solución

Sean P(x, y); el punto de intersección de las rectas AB y CD, tal como lo muestra la figura siguiente:



Como P, B y A son colineales tenemos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 5y + 35 = 0;$$ de donde: $x - y = -7$ (1)

Como P, C y D son colineales, tenemos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 18 = 0;$$ de donde: $x + y = 9$ (2)

De (1) y (2) , se tiene: $P(x, y) = (1, 8)$

15. Determine el punto P del segmento AB que dista 5 cm del origen. Dados A(0, –25) y B(–2, –1).

Solución

Sean (x, y) las coordenadas del punto P; entonces:

$$P(X, y) : \begin{cases} 1) \ d_{OP} = 5 \\ 2) \ P,\ A,\ B \text{ son colineales} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) \ (x-0)^2 + (y-0)^2 = 25 \\ 2) \ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -25 & 1 \\ -2 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

De (2) se tiene: $-14x - 2y - 50 = 0$. Despejando: $y = -7x - 25$ (3)

sustituyendo en (1) se tiene: $x^2 + (-7x - 25)^2 = 25$

$$x^2 + 49x^2 + 350x + 625 = 25$$

$$50x^2 + 350x + 600 = 0$$

De donde: $x = -3$ ó $x = -4$

Reemplazando en (3): $y = -4$ ó $y = 3$

Por tanto: P(–3, –4) ó P(–4, 3)

PROBLEMAS PROPUESTOS

"No se debe esperar ayuda sino se hace el esfuerzo". Manandro.

1. Dados los puntos A(5) y B(–3), determinar la coordenada del punto M simétrico al punto A con respecto al punto B.

a) –11 b) 11 c) –2 d) –8 e) 8

2. Los Puntos A(6, 12) y (0, –6) pertenecen a una recta. Un tercer punto en esta recta es:
a) (3, 3) b) (2, 1) c) (7, 16) d) (–1, –4) e) (–3, –8)

3. El segmento limitado por los puntos A(–2) y B(19) se ha dividido en tres partes iguales. Determinar la suma de las coordenadas de los puntos de división.

a) 12 b) 15 c) 17 d) 13 e) 19

4. Determinar la diferencia de las coordenadas de los extremos A y B (en ese orden) del segmento dividido en tres partes iguales por los puntos P(–25) y Q(–9).

a) 48 b) 34 c) –48 d) –34 e) N.A.

5. Hallar el producto de las coordenadas del punto simétrico, B(2, –4) con respecto al origen de coordenadas.

a) 8 b) –8 c) 16 d) –16 e) N.A.

6. Dadas las proyecciones del segmento AB sobre los ejes coordenados X = 5; Y = –4, hallar las coordenadas de su extremo, sabiendo que su origen está en el punto A(–2, 3).

a) (3, 1) b) (3, –1) c) (–3,1) d) (–3, –1) e) N.A.

7. La longitud de un segmento es igual a 5, su proyección sobre el eje de abscisas es igual a 4. Hallar la proyección de este segmento sobre el eje de ordenadas, si forma con el eje de ordenadas: a) un ángulo agudo, b) un ángulo obtuso.

a) a = 3; b = –3 b) a = –3; b = 3 c) a = –3; b = –3 d) a = 3; b = 3

8. La longitud del segmento MN es igual a 13; su origen está en el punto (3; –2), la proyección sobre el eje de abscisas es igual a –12. Hallar las coordenadas del extremo de este segmento, si forma con el eje de ordenadas un ángulo agudo.

a) (9, –3) b) (–9, –3) c) (9, 3) d) (3, –9) e) (–9, 3)

9. Calcular el perímetro del triángulo ABC, siendo los vértices los puntos A(3, 1); B(–1, 1); C(–1, 4).

a) 14 b) 12 c) 16 d) 18 e) N.A.

10. Determinar el valor de “x” de modo que el triángulo ABC, formado por los puntos A(–2, 5); B(2, -1); C(3, x); sea un triángulo rectángulo en B.

a) 1 b) $-1/3$ c) 3 $1/3$ e) N.A.

11. Dados A(x, 3); B(–1, 4) y C(5, 2), obtenga x de modo que A sea equidistante de B y C.

a) 0 b) 1 c) 2 d) –1 e) –2

12. Determinar el punto P, perteneciente al eje de las abscisas, sabiendo que equidista de los puntos A(2, –1) y B(3, 5).

a) (29, 0) b) $(29/2, 0)$ c) $(-29/2, 0)$ d) (2, 0) e) (–2, 0)

13. Determine un punto P, de la bisectriz de los cuadrantes pares, que equidista de A(0, 1) y B(–2, 3).

a) (2, –2) b) (–2, 2) c) (–3, 3) d) $(-3/2,\ 3/2)$ e) $(3/2,\ -3/2)$

14. Dados A(5, –2) y B(4, –1), vértices consecutivos de un cuadrado, determine el producto de las ordenadas de los otros dos vértices.

a) 6 b) –6 c) 5 d) –5 e) 12

15. Dados A(1, 2) y C(3, –4), extremidades de la diagonal de un cuadrado, calcule el producto de los elementos de las coordenadas de los vértices B y D, sabiendo que $x_B > x_D$.

a) 10 b) 5 c) 24 d) 100 e) 0

16. Determinar la naturaleza del triángulo cuyos vértices son: A(–6, –4); B(–5, 3) y C(–2, –1).

a) Isósceles b) Rectángulo c) Escaleno

d) Equilátero e) Isósceles y Rectángulo

17. Los puntos medios de los lados de un triángulo son: A(3, 1); B(2, 0) y C(1, 2). Hallar las coordenadas de los vértices del triángulo.

a) (2, 3) ; (–4, 1) ; (1, 0)

b) (3, 2) ; (4, –1) ; (0, 1)
c) (2, 3) ; (4, –1) ; (0, 1)
d) (–2, 3) ; (–4, –1) ; (1, 0)

18. En un triángulo ABC se tiene A(2, 0) y M(–1, 4) es punto medio de AB. Si $|AC|$ = 10 y $|BC|$ = $10\sqrt{2}$. Hallar los vértices B y C.

a) B(–4, 8) ; C(10, –6) ó C(–6, –6)

b) B(–4, 8) ; C(10, 6) ó C(6, –6)

c) B(–4, 8) ; C(–10, –6) ó C(–6, –6)

d) B(–4, 8) ; C(10, 6) ó C(–6, –6)

e) B(–4, –8) ; C(10, –6) ó C(–6, –6)

19. Dos vértices de un triángulo equilátero son A(4, 10) y B(14, 0). Hallar el tercer vértice.

a) $C\left(9 \pm 5\sqrt{3};\ 5 \pm 5\sqrt{3}\right)$ c) $C\left(5 \pm 5\sqrt{3};\ 5 \pm 5\sqrt{3}\right)$

b) $C\left(9 \pm 5\sqrt{3};\ 9 \pm 5\sqrt{3}\right)$ d) $C\left(5 \pm 5\sqrt{3};\ 9 \pm 5\sqrt{3}\right)$

20. Los puntos C(2, 4) y M(5, –2) son, respectivamente el centro y un vértice de un cuadrado MNPQ, hallar los otros vértices.

a) N(–4,–1) ; P(–1, –10) ; Q(8, 7) b) N(–4,1) ; P(–1, 10) ; Q(8, 7)

b) N(–4,–1) ; P(1, 10) ; Q(–8, 7) d) N(–4,1) ; P(1, 10) ; Q(8, –7)

c) N(4,1) ; P(1, 10) ; Q(8, 7)

21. Un móvil se desplaza sobre un eje coordenado, su posición en cada instante está, dada por x = 2t + 5. Hallar el espacio recorrido por el móvil entre los instantes 2 seg. y 6 seg.

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

22. Si “p”, “q” y “r” son números reales, entonces los puntos: A(p, q + r) ; B(q, p + r) y C(r, p + q) son:

a) No alineados b) Colineales c) El mismo punto

d) Puntos sobre uno de los ejes e) N.A.

23. Si un triángulo tiene por vértices, A(a, b); B(a + c, b); C(a + c, b + c), entonces el triángulo es:

a) Isósceles. b) Equilátero c) Rectángulo d) No se sabe

24. Si G(2, 3) es el baricentro de un triángulo ABC. G_1(4, 6) y G_2(3, –1) son los baricentros de dos triángulos formados uniendo G con los vértices A, B y C. Determinar éstos vértices.

a) A(11, 0); B(–1, 15); C(–6, –4). b) A(–11, 0); B(–1, 15); C(–6, –4)

c) A(–11, 0); B(–1, 15); C(4, –6) d) A(–11, 0); B(–1, –15); C(–4, –6)

e) A(11, 0); B(–1, 15); C(–4, –6)

25. Los vértices de un polígono son A(–3, –4); B(7, –4); C(10, 4); D(5, 7) y E(–5, 5). Calcular su perímetro y la longitud de la diagonal AD.

a) 42 ; 12.04 b) 44 ; 12.06 c) 40 ; 12.04 d) 64 ; 18.04

26. Calcule la razón AC/CB dados los puntos A(1, 4); B($1/2$, 3) y C(–2, –2).

a) $6/5$ b) $-6/5$ c) $4/5$ d) –2 e) 3.

27. Dados los puntos A(5, 3) y B(–1, –3) y sea C la intersección de la recta AB con el eje de las abscisas. Calcular la razón AC/CB.

a) 2 b) –2 c) –1/3 d) 1 e) 3

28. Determine los puntos que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales, cuando A = (3, –2) ; B = (15, 10).

a) (6, 1) ; (9, 4) y (12, 7) c) (6, –1) ; (9, –4) y (12, –7)

b) (–6, 1) ; (–9, 4) y (–12, 7) d) (6, 1) ; (–9, –4) y (–12, –7)

29. Hasta que punto el segmento de extremos A(4, –1) y B($2/3$, –1) debe ser prolongado en el sentido de AB para que su longitud se triplique?.

a) (–6, –1) b) (6, –1) c) (–6, 1) d) (1, –6) e) (–1, 6)

30. Dados los vértices consecutivos, A(4, –2) y B(3, –1) de un paralelogramo y el punto E(2, 1), intersección de sus diagonales, determine los otros dos vértices.

a) C(0, 4); D(3, 1) b) C(0, 4); D(3, 3) c) C(4, 0); D(1, 3)

d) C(0, 4); D(1, 3) e) N.A.

31. Si M(1, 1); N(0, 3) y P(–2, 2) son los puntos medios de los lados AB, BC y CA, respectivamente, de un triángulo ABC, determine la suma de las coordenadas de los vértices A, B y C.

a) 5 b) 4 c) 13 d) 0 e) 12

32. El baricentro de un triángulo es G(5, 1) y dos de sus vértices son A(9, –3) y B(1, 2). Determine el tercer vértice.

a) C(5, –4) b) C(–5,–4) c) C(5, 4) d) C(–5, 4) e) (–4,–4).

33. El baricentro de un triángulo ABC, es G$(2/3, 1/3)$;el punto medio de BC es N$(0, 1/2)$; y el punto medio del lado AB es M$(1/2,\ 2)$ .Determine los vértices A, B y C.

a) A(2, 0); B(3, 2); C(3, –4) b) A(2, 0); B(3, –2); C(–3, –4)

c) A(–2, 0); B(–3, 2); C(–3, 4) d) A(–2, 0); B(3, 2); C(–3, –4)

e) A(2, 0); B(3, 2); C(–3, 4)

34. En el triángulo ABC se conoce que: A(–4, 3) ; M(–4, 6) es punto medio de BA; la distancia de AC = 8 y la distancia de BC = 10. Obtenga Ud. el vértice C, cuya abscisa sea negativa.

a) (–12, 3) b) (–4, 3) c) (–12, –3) d) (–4, –3) e) (–3, –4)

35. El baricentro del triángulo ABC es el punto G(3, 3). Determinar los vértices del triángulo, sabiendo que los puntos medios de dos de sus lados son los puntos P(–3, 4) y Q(7, 3).

a) A(–5,3) ; B(–1,5) ; C(15, 1) b) A(–5,3) ; B(1, –5) ; C(1, 5)

c) A(5, –3) ; B(1, –5) ; C(15, 1) d) A(3, –5) ; B(–1, 5) ; C(15, –1)

36. Hallar los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son A(–2,3) y B(6,–3).

a) $P(2/3,-1)$; $Q(10/3,-1)$ b) $P(2/3,\ 1)$; $Q(10/3,\ 1)$
c) $P(2/3,-1)$; $Q(10/3,-1)$ d) $P(2/3,\ 1)$; $Q(10/3,-1)$

37. Los extremos de un segmento son los puntos A(7, 4) y B(–1, –4). Hallar la razón AP/PB, en que el punto P(1, –2) divide al segmento.

a) –3 b) 3 c) 1/3 d) –2 e) 2

38. Los extremos de un segmento son A(–4, –7) y B(6, 3). Un punto P lo divide en la razón 2 es a 3. Calcular la longitud de cada segmento.

a) $-4\sqrt{2}$ y $-6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2}$ y $6\sqrt{2}$ c) $8\sqrt{2}$ y $12\sqrt{2}$

d) $\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{2}$ y $-6\sqrt{2}$

39. Un segmento AB está dividido en dos partes por un punto P(2, –3) de modo que AP **:** PB = 2 **:** 5. Calcular la posición del punto A, si B(–3, 2)

a) (4, –5) b) (–4, 5) c) (4, 5) d) (–4, –5) e) (–5, –4)

40. Los vértices de un triángulo MPQ, son: M(–3, 6); P(9, –10); Q(–5, 4). Entonces la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, esta entre:

a) 5 y 8 b) 8 y 9 c) 9 y 11 d) 11 y 13 e) d) 13 y 15

41. Dados los puntos M(2, 2) y N(5, –2), hallar en el eje de abscisas un punto P de modo que el ángulo MPN, sea recto.

a) (1, 0) ó (6, 0) b) (–1, 0) ó (6, 0) c) (1, 0) ó (–6, 0)

d) (2, 0) ó (4, 0) e) (–1, 0) ó (–6, 0)

42. Por el punto M(1, –2) se ha trazado una circunferencia de radio 5, tangente al eje OX. Determinar el centro C de la misma sabiendo que su abscisa es positiva.

a) (5, 5) b) (3, –5) c) (5, –5) d) (3, –3) e) (5, –3)

43. Los extremos de un varilla homogénea son A(3, –5) y B(–1, 1). Determinar las coordenadas de su centro de gravedad.

a) (–1, –2) b) (–1, 2) c) (1, –2) d) (–2, –1) e) (–2, –2)

44. El centro de gravedad de un varilla homogénea está situado en el punto M(1, 4); uno de sus extremos es el punto P(–2, 2). Determinar las coordenadas del otro extremo Q de la varilla.

a) (2, 4) b) (2, 6) c) (4, –6) d) (–4, –6) e) (4, 6)

45. Los vértices de un triángulo son los puntos A(2, –5); B(1, –2); C(4, 7). Hallar el punto de intersección del lado AC con la bisectriz del ángulo interno del vértice B.

a) (5, –2) b) $(5/2,\ -2)$ c) (–5, –2) d) $(5/2,\ 2)$ e) (2, –5)

46. Los vértices de un triángulo ABC, son: A(3, –5); B(–3, 3) y C(–1, –2). Determinar la longitud de la bisectriz del ángulo interno del vértice A.

a) $8\sqrt{2}$ b) $12\sqrt{2}$ c) $14\sqrt{2}$ d) $\frac{14}{3}\sqrt{2}$ e) $\frac{12}{3}\sqrt{2}$

47. Los vértices de un triángulo ABC son: A(–1, –1); B(3, 5) y C(–4, 1). Hallar el punto de intersección de la bisectriz del ángulo externo del vértice A con la prolongación del lado BC.

a) (–3, 11) b) (–11, –6) c) (11, 3) d) (11, –3) e) (–11, –3)

48. Los vértices de un triángulo ABC son: A(3, –5); B(1, –3) y C(2, –2). Determinar la longitud de la bisectriz del ángulo externo del vértice B.

a) 2 b) 5 c) 6 d) 4 e) 3

49. Una recta pasa por los puntos A(–12, –13) y B(–2, –5). Hallar en esta recta el punto cuya abscisa es igual a 3.

a) (3, –2) b) (3, –3) c) (3, –1) d) (3, 0) e) (3, –5)

50. Una recta pasa por los puntos A(2, –3) y B(–6, 5). Hallar en esta recta el punto cuya ordenada es igual a: –5.

a) (4, –5) b) (3, –5) c) (2, –5) d) (1, –5) e) (–1, –5)

51. Una recta pasa por los puntos A(7, –3) y B(23, –6). Hallar el punto de intersección de esta recta con el eje de abscisas.

a) (9, 0) b) (–9, 0) c) (0, –9) d) (6, 0) e) (–6, 0)

52. Una recta pasa por los puntos A(5, 2) y B(–4, –7). Hallar el punto de intersección de esta recta con el eje de ordenadas.

a) (0, 3) b) (0, –3) c) (0, –2) d) (0, 2) e) N.A.

53. Los vértices de un cuadrilátero son A(–2, 14); B(4, –2);C(6, –2) y D(6, 10) Determinar el punto de intersección de sus diagonales AC y BD.

a) $(9/2,\ 1)$ b) $(7/2,\ 1)$ c) (3, 1) d) $(-9/2,\ 1)$ e) N.A.

54. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos: A(2, –3); B(3, 2) y C(–2, 5).

a) $10u^2$ b) $12u^2$ c) $14u^2$ d) $16u^2$ e) N.A.

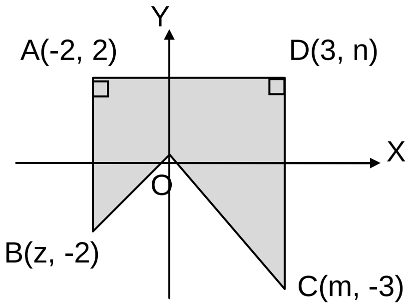
55. Calcular el área del triángulo formado por las rectas: L_1: y – 2x + 4 = 0 ; L_2: y – x – 1 = 0; L_3: y – 3x + 3 = 0.

a) $5u^2$ b) $7u^2$ c) $9u^2$ d) $11u^2$ e) $9.5u^2$

56. Calcular el área formado por los puntos A(–4, 3); B(5, 4); C(2, –2) y D(–3, –5).

a) $47u^2$ b) $42u^2$ c) $12u^2$ d) $35u^2$ e) N.A.

57. En la figura siguiente hallar el área del pentágono ABOCD.



a) $10.5u^2$ b) $16.5u^2$ c) $8.5u^2$ d) $12.5u^2$ e) $18.5u^2$

58. El área de un triángulo es 3; dos de sus vértices son los puntos A(3, 1); B(1, –3); el tercer vértice C está situado en el eje OY. Determinar las coordenadas del vértice C.

a) (0, –8) ó (0, –2) b) (0, 8) ó (0, 2)

c) (0, –4) ó (0, –1) d) (0, 4) ó (0, 2) e) N. A

59. El área de u triángulo es 3; dos de sus vértices son los puntos A(3, 1) y B(1, –3); el centro de gravedad de este triángulo está situado en el eje OX. Determinar las coordenadas del tercer vértice C.

a) (–5, 2) ó (–2,2) b) (–5,2) ó (2, –2) c) (5, –2) ó (2, –2)

d) (–5, 2) ó (2, 2) e) (5, 2) ó (2, 2)

60. Los vértices consecutivos de un polígono convexo son: A(–3, –2); B(7, –4); C(10, 4); D(5, 7) y E(–5, 5). Calcular su área.

a) $100u^2$ b) $90.5u^2$ c) $100.5u^2$ d) $102.5u^2$ e) $80u^2$