MODULO DE MATEMATICA

Reflexiones didácticas

en torno a Fracciones, Razones y Proporciones

GRUPOS PROFESIONALES DE TRABAJO

Ministerio de Educación

Módulo de Matemática:

Reflexiones didácticas en torno a Fracciones, Razones y Proporciones

Material producido por el Componente Gestión Pedagógica
para los Grupos Profesionales de Trabajo

Editores
María Inés Noguera E.
María Victoria Gómez V.
Jorge Galaz N.

1998

Inscripción R.P.I. N° En Trámite

ISBN N° En Trámite

Diseño: Mario Casassus

Impresión: JORDAN S.A.

Publicación del Programa MECE / Educación Media
Programa de Mejoramiento de la Calidad y Equidad de la Educación
Ministerio de Educación
República de Chile

Alameda 1371, Piso 9, Santiago
Tel. 699 10 15   Fax 699 10 30

MÓDULO DE MATEMÁTICA

Reflexiones didácticas

en torno a Fracciones, Razones y Proporciones

AUTORA:
LEONORA DÍAZ MORENO
Universidad Católica Blas Cañas

Con la colaboración de
Manuel Rubio Manríquez

GRUPOS PROFESIONALES DE TRABAJO
MINISTERIO DE EDUCACION - PROGRAMA MECE MEDIA

Palabras preliminares

Módulos Didácticos

El desarrollo profesional docente es un eje fundamental en el proceso de reforma educativa, puesto que marca la posibilidad de generar transformaciones sustantivas en las prácticas pedagógicas. Para ello se hace necesario la creación de espacios para el intercambio de experiencias, el trabajo colaborativo y la reflexión crítica sobre el propio quehacer. Este espacio se constituye en el origen de construcción del saber pedagógico.

En este contexto el Programa Mece-Media ha promovido la creación de Grupos Profesionales de Trabajo (GPT) al interior de cada liceo, en los cuales participan profesores y jefes de Unidades Técnico-Pedagógicas. En consecuencia, el GPT es el espacio natural del desarrollo profesional.

Como una forma de contribuir a este desarrollo, el Componente de Pedagogía presenta los Módulos Didácticos, que se constituyen en una herramienta centrada en aspectos fundamentales disciplinarios y didácticos como un aporte a la revisión y rediseño de las prácticas de enseñanza. Por otra parte, los Módulos Didácticos intentan conformarse como un referente que permita a los docentes encontrar los caminos mas apropiados para la implementación del nuevo marco curricular.

Ejes organizadores de los Módulos

• Contenidos conceptuales
Se inscriben en ámbitos temáticos referidos a un área disciplinaria particular, aportando a la actualización y profundización de conceptos claves para promover la comprensión y aprendizaje de contenidos curriculares relevantes.

Al mismo tiempo, y como correlato de lo anterior, los Módulos incorporan enfoques interdisciplinarios que permiten el trabajo con conceptos complejos desde miradas diversificadas. Lo que contribuye significativamente a los procesos de producción de conocimiento de los alumnos.

• Procedimientos didácticos
Los Módulos explicitan la relación que el docente establece entre los contenidos conceptuales, el aprendizaje y los modos de enseñar, surgiendo algunas actividades en las diferentes temáticas que se abordan.

Sin embargo, en su lectura y discusión es necesario tener presente permanentemente los diferentes contextos socioculturales donde está inserta la acción pedagógica de los profesores. Estos procesos de adecuación están marcados por los conocimientos que los docentes tienen de

a) las formas de conocer y producir conocimientos de sus alumnos.
b) los modos de producción de conocimiento de la disciplina específica objeto de enseñanza, y
c) de la relación que es necesario establecer entre ambos.

Una invitación

Registrar y compartir las diversas formas de trabajo pedagógico, las manifestaciones y producciones de los alumnos, la reflexión e interpretación sobre las instancias de búsqueda, como dijimos antes, es el inicio del proceso de construcción de saber pedagógico, que se concretiza, se hace real en la escritura. Para ello, el Componente de Pedagogía extiende una invitación a todos los docentes de Enseñanza Media a escribir sus prácticas y publicitarlas en las Páginas Didácticas.

Indice

PRÓLOGO

ESTE MODULO PRESENTA UNA MIRADA a las distintas facetas de las fracciones, desde una perspectiva didáctica, a nivel del Primer Año de Enseñanza Media. A propósito de un caso, que relata una conversación efectivamente realizada con un grupo de profesores, se revisan las concepciones, habilidades y actividades que el profesor puede poner en ejercicio, con el fin de convertir en objeto de enseñanza este contenido.

El profesor, para desarrollar este proceso, requiere tener dos elementos fundamentales como referencia: por un lado, el contenido mismo y, por otro, las situaciones en las cuales sus alumnos y alumnas se encuentran, especialmente referidas al mencionado contenido. En este sentido, el proceso pedagógico requiere de dos procesos complementarios

1. *La articulación de un proceso de transformación del contenido, para hacerlo enseñable por el profesor y aprendible por los alumnos y alumnas. En otras palabras, todo proceso pedagógico contiene una dimensión didáctica, referida a concepciones, métodos y técnicas.*

2. *La configuración de un tipo de relación que facilite el encuentro entre los objetivos del profesor y los intereses y condiciones de sus alumnos y alumnas, con el propósito de aportar al desarrollo integral de éstos. Aquí estamos en la dimensión del diálogo educativo, de la comunicación educativa.*

Un contenido puede estar bien elaborado didácticamente, pero si no considera la realidad de los alumnos y alumnas, si no desarrolla la dimensión comunicativa, puede verse seriamente obstaculizado.

Los profesores y las profesoras, en tanto tales, necesariamente se ven situados frente a un contenido con el propósito de facilitar su aprendizaje. En el ejercicio docente han ido acumulando una serie de experiencias y aprendizajes; entre estos, la identificación de algunos problemas específicos.

En consecuencia, el desarrollo de este módulo busca convocar a la reflexión sobre las prácticas pedagógicas, como un modo de aprender a utilizar la experiencia acumulada, para enfrentar autónomamente el procesamiento de contenidos matemáticos para hacerlos enseñables y aprendzajes y, también, para resignificar aportes efectuados por investigadores y especialistas, en el ámbito de los desafíos específicos que surgen del quehacer en el aula.

Esto requiere enfrentar grupal y críticamente el quehacer concreto que cotidianamente desarrollan los profesores de matemática, develar los sentidos y fundamentos en que efectivamente se cimenta, así como los obstáculos más recurrentes, a fin de iniciar un proceso de búsqueda que permita cualificarlo, mediante la creación colectiva de alternativas didácticas.

Para lograr avanzar en esta perspectiva de trabajo, el presente módulo requiere del compromiso, tanto individual como de cada uno de los integrantes del grupo profesional de trabajo. La mejor actitud para abordar las actividades propuestas, es visualizarlas como un desafío.

Leonora Díaz M.
Enero 1998

PRESENTACIÓN

CONTENIDOS

La primera unidad se estructura sobre la base del desarrollo de actividades. Éstas enfrentan a los participantes a problemas relativamente típicos, que deben ser analizados tomando como referencia las prácticas personales, primero en forma individual y, luego, colectivamente. Cada una de estas actividades se complementa con una breve lectura, cuyo propósito es aportar algunos elementos teóricos que permitan iluminar algunos aspectos relevantes y que, además, pudieran servir de apoyo para el estudio de la segunda unidad. Más específicamente, dicha unidad presenta un caso : parte de la conversación sostenida en una reunión de trabajo de un grupo de profesores. La actividad propuesta es el análisis de este caso con la perspectiva de identificar problemas cuando se enfrenta la enseñanza de las fracciones, razones y proporciones. Para facilitar el aprendizaje del método de análisis propuesto, se escoge una de las dificultades y se la somete a análisis, presentando así un modelo que guíe la tarea que debe desarrollar el grupo profesional de trabajo.

En la segunda unidad se presentan facetas y manipulaciones tendientes a favorecer la construcción de una mirada global para las fracciones. Se inicia con una primera lectura de carácter general que propone dos concepciones de la enseñanza de la matemática. En la segunda lectura, se introduce a distintas facetas de las fracciones. Se las agrupa entre unas de carácter dinámico y otras de carácter estático, dando ejemplos de distintas presentaciones para tales facetas. Además se presentan manipulaciones, en un orden creciente de abstracción, vinculando los contextos kinestésico, oral y simbólico (de registro o cálculo), por medio de ejemplos.

En la tercera unidad se presentan algunos elementos sobre razones y proporciones con el objeto de favorecer nuevas miradas para su enseñanza. El hilo conductor de los aspectos elegidos encuentra su explicación en los temas levantados por los profesores en el relato presentado en la primera unidad. Estos aspectos dicen relación con los conceptos mismos, cómo se relacionan, sus aplicaciones, y, en particular con las dificultades para abordar el cambio de unidades en contextos de uso de otras disciplinas distintas a la matemática.

PROPÓSITOS DEL MODULO

Contribuir, a partir de una experiencia ejemplificadora, a que grupos de trabajo de profesores de matemática se familiaricen con un método de análisis que les permita identificar problemas presentes en su labor en el aula a propósito de la enseñanza de las fracciones, razones y proporciones.

Presentar facetas y manipulaciones tendientes a favorecer la construcción de una red de significados para las fracciones, que favorezca en los estudiantes un desplazamiento fluido entre dichas facetas y sus manipulaciones.

MÉTODO DE TRABAJO

Para asumir el presente módulo, es recomendable elegir un animador grupal por sesión, cuya función es estimular la conversación de los participantes y velar por el cumplimiento de los tiempos acordados. También sería conveniente elegir un relator o relatora para cada sesión que registrara las discusiones y elaboraciones grupales de modo de poder devolver a la consideración del grupo los avances de su reflexión.

Cada actividad propuesta podría significar en la práctica una sesión de unas dos horas de trabajo. Para cumplir eficientemente con este lapso de tiempo, es aconsejable que cada participante prepare individualmente cada actividad, de tal modo que la reunión se centre en la interacción de las respuestas que cada uno ha elaborado. La preparación le demandará de una lectura atenta y el desarrollo de las tareas que ésta propone. Si bien se trata de tiempos personales distintos, debiese presupuestar unos 90 minutos por actividad.

A fin de que el trabajo sea lo más beneficioso posible, es fundamental que el grupo profesional de trabajo considere lo siguiente

1. Tenga como punto de partida y de llegada de su reflexión, el quehacer a nivel de aula.

2. Comprenda que su labor no es constituirse en una instancia de evaluación ni de calificación del trabajo de sus participantes.

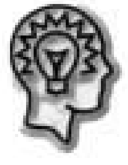
3. Visualice que su labor es la de un taller, por lo cual el producto alcanzado es el resultado del aporte que cada uno esté dispuesto a hacer.

4. Valore la heterogeneidad, la diversidad de opiniones, como un valor que permite el diálogo, el debate y la reflexión.

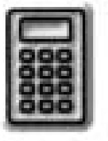
5. Entienda que no hay respuestas correctas que elegir, sino que es fundamental generar construcciones grupales que sean funcionales y eficaces para la realidad de cada aula.

ICONOGRAFÍA

ALGUNOS SIGNOS PARA AYUDAR A LA LECTURA



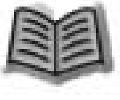
De forma a sus propia ideas



Calcule

Trabaja compartido en el GPT : ocupe un tiempo extra en esta(s) idea(s).

Indague, investigue



Lea este texto atentamente

Escriba su(s) respuesta(s) en su cuaderno de apuntes

Reflexione : ocupe un tiempo extra en esta(s) idea(s).

Fije su atención en este (estos) aspecto(s) clave(s)


60 seg
3 min
X seg

PRIMERA SESIÓN

Aprendamos de nuestras prácticas ¿Cómo enseñamos fracciones, razones y proporciones?

En esta unidad se analizará la conversación de un grupo de profesores respecto de sus experiencias de enseñanza y aprendizaje de las fracciones. Este estudio de caso se propone a modo de ejemplo del tipo de reflexión crítica de las prácticas en el aula, las que al rutinizarse se van transformando en algo obvio, evidente, natural. Esta rutinización de nuestras prácticas es uno de los obstáculos para transformarlas, en orden a mejorar los aprendizajes de los alumnos y alumnas, a la vez que para aprender desde las propias prácticas.

VISUALIZACIONES Y USOS DE LAS NOCIONES DE FRACCION, RAZÓN Y PROPORCIÓN

A continuación se entrega un segmento del registro de la conversación grupal que fue realizada el sábado 30 de agosto de 1997 con profesores de un establecimiento de la región metropolitana. La finalidad de esta conversación fue relevar situaciones y obstáculos frecuentes con que los profesores se encuentran al enseñar fracciones.

Sugerencias

a) Antes de abordar la lectura del relato haga una pequeña introspección en orden a asumir una actitud de "investigador (a) " abierto a descubrir lo nuevo entretejido en esta conversación, que pudiera parecerle un tipo de conversación ya conocida y escuchada por usted, que a menudo se daría entre colegas. En su introspección procure, además, colocarse en una actitud que mira la enseñanza desde la perspectiva del alumno.

b) Lea cuidadosamente el caso que se presenta a continuación.

c) Responda las preguntas que aparecen al final.

EL RELATO

Para objeto del registro se nominaron como sigue a los participantes

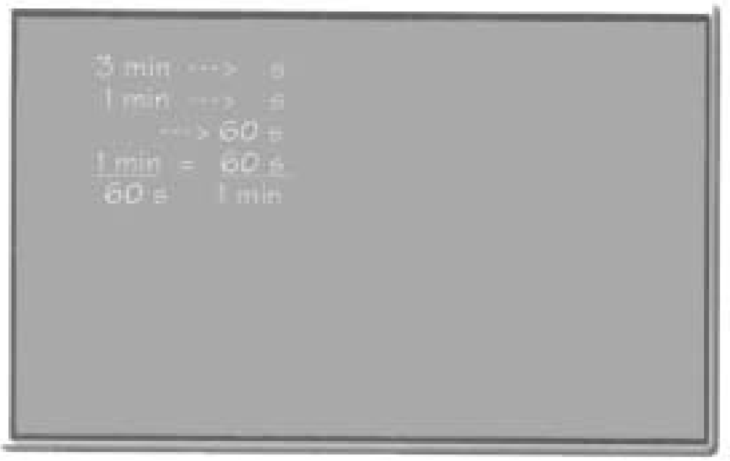
Marta, profesora de ciencias naturales
Lorena, profesora de matemática
José, profesor básico de matemática
Lino, profesor de matemática
Silvia, profesora de matemática
Oscar, profesor de matemática y computación
Blanca, profesora de matemática
M, Moderadora

1. M : Marta ¿ ***Cómo explicas la fracción en química ?***

2. Marta : En química es necesario el uso de proporción y fracción en conversiones de unidades. Eso les cuesta y tengo que explicar las matemáticas para llegar a un simple factor unitario. Eso ocurre en 8° y tiene que ver con física. Les costó mucho entender. Pero no es sólo de los 8°, sino también de 1° medio.

3. M : ¿ ***Podrías poner un ejemplo concreto de física o química ?***

4. Marta: Transformar minutos a segundos 1 minuto ---> 60 segundos. Esto es igual a
   1 min/ 60 sg = 60 sg/1 min ¿ Tres minutos cuántos segundos son ? Eso no lo saben hacer.



// Mientras explica escribe en pizarra

5. Lino : Falta unir criterios y unificarlos. En 8° no hemos visto proporciones.

6. Marta : En 1° tampoco son capaces de hacerlo.

7. José : A lo mejor no se acuerdan, pero si se lo recuerdas, aprenden.

8. Lino : Eso no es proporción.

9. Marta : No, es factor unitario.

10. Oscar : Así el cabro no lo va a entender, matemáticamente no lo va a entender. Hay confusión. Uno en matemática le insiste mucho que se comparan cantidades iguales. Poner minuto y segundo produce confusión.

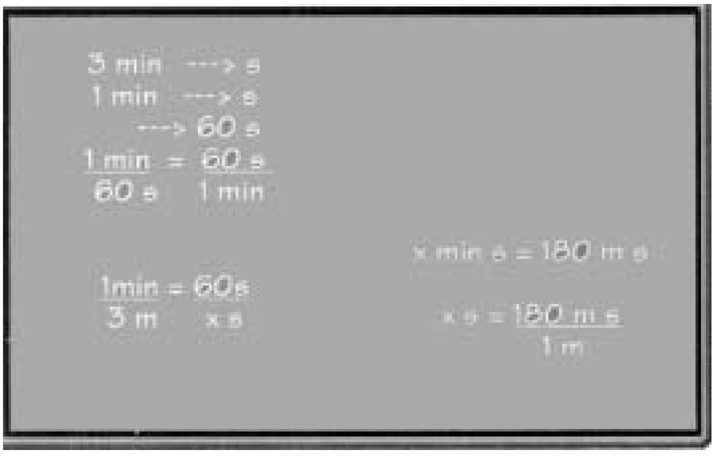
11. M : ¿ ***Cómo se puede resolver eso ?***

12. José : Es necesario ordenar.

13. Lino : Ponernos de acuerdo. Trabajar con unidades o hacer ordenación de conceptos ; en físico química que se asuma lo que se hace en matemáticas.
(Anota en pizarra a continuación de lo anterior : lmin / 3m = 60s / xs).
Es una multiplicación cruzada. El producto de los medios es igual al producto de los extremos.

14. Oscar : Pero ¿ cómo lo entienden ? : "multiplicar cruzado"

//Continua Lino escribiendo en pizarra



15. Oscar : Lo que pasa es que es el viejo problema de que los alumnos despejan la x. Tienen aterrizado lo de dejar la x sola, pero ¿ qué es la x ? ¿ segundos o minutos ?

16. Lino : Le están facilitando la mecanización. Te responde 180, pero 180 qué...

17. Blanca : Aquí faltó definir la x. Hay que decir que las x son los segundos.

18. Lino : Hay que dejar claro que lo que se anda buscando son x segundos. ¡ Ah ! Ando buscando los segundos. ¿ Qué pasa si yo los saco y digo que es la x ?

19. Lorena : Mientras tú le dejas claro que anda buscando segundos, le vas a facilitar...

20. Blanca : Hay que definir que significa la incógnita. Ahí no termina el ejercicio. El ejercicio se resuelve diciendo que "tres minutos son 180 segundos".

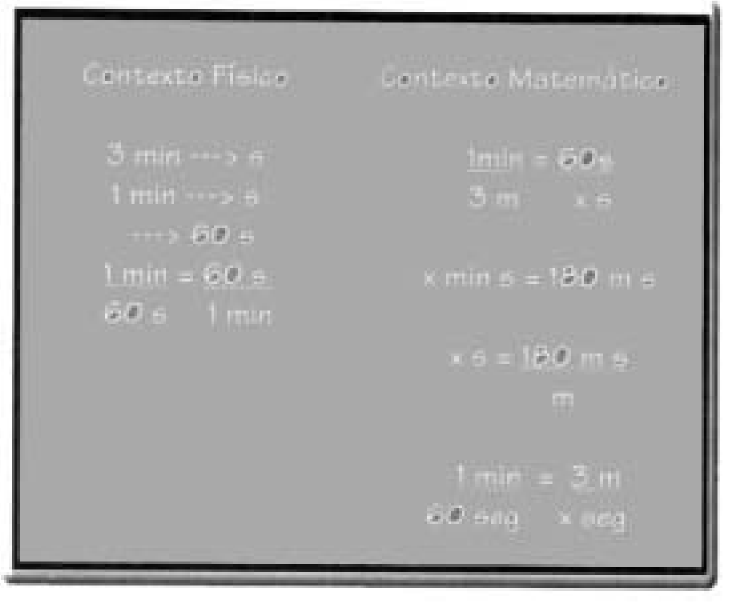
21. Lorena : Eso se pierde de lo que los niños tienen de básica.

22. Lino : En básica se les hace la pregunta, luego viene el procedimiento y finalmente la respuesta. Ahora en media eso lo necesitan hacer en forma mental.

23. Blanca : Un problema tiene que arrojar una respuesta. Y además comprobar el resultado

// La moderadora separa en dos sectores la pizarra. Al texto del lado izquierdo lo titula "Contexto Físico" y al derecho "Contexto Matemático". Lino añade al lado derecho

$$\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{seg}} = \frac{3\ \text{m}}{x\ \text{seg}}$$



24. Oscar : ¿ Cuándo trabajas con esta ? (refiriéndose a la igualdad $\frac{\text{lmin}}{\text{3m}} = \frac{\text{60s}}{\text{xs}}$

Casi nunca. ¿ Y cómo la lees ? "1 minuto es a 60 segundos como 3 minutos es a x segundos" ¡ Igual que la anterior !.

25. Lino : ¿ Cómo lo leo ? No me cuadra

26. Lorena: Yo les hago ordenar en tablas. Aquí los metros, acá los segundos.

27. José : ¿ Qué comparan aquí : 1 min / 3 min ¡ Esto lo puedo cambiar!
¿ Puedes cambiar 1 min / 60 seg ? ¡ Este es factor unitario !

28. Lorena : Alternando medios (...) es lo mismo (...)

29. M : (Presenta la expresión 40km/h, pregunta su sentido, siendo unidades heterógeneas)

30. Lorena : Tengo problema con el concepto razón

31. Oscar : No hay problema, si el tipo tiene corporalizado el problema en una situación cotidiana. Un minuto ¿ a cuánto equivale ? Es único.

32. Lorena : Y ella (refiriéndose a Marta 1) lo ve como fracción, no como razón.

33. Lino : Si lo vamos a asociar, debe existir una realidad concreta.

34. Lorena : Sí, pero no todo es real, la matemática es algo abstracto.

35. Silvia : Por ejemplo, el álgebra es abstracta.

36. Lorena : Nunca lo había hecho con unidades diferentes... siguen siendo razones.

PREGUNTAS PARA EL GRUPO DE TRABAJO

1.

a) A partir del relato identifique situaciones problemáticas comprometidas en la conversación de los docentes (puede ayudarse señalando con el destacador sus frases claves).

b) A las situaciones problemáticas identificadas, póngale títulos que refieran al problema central que cada una de ellas refleja.

c) En particular, identifique los modos de entender los conceptos de fracción, razón y proporción así como los modos de abordar su enseñanza, presentes en la conversación.

2. Ponga en común con su grupo las situaciones identificadas y asignen un orden para su reflexión.

3. En relación a la situación elegida para iniciar la reflexión se sugiere, llevando registro escrito de cada fase

a) Elegir un título para denominar el problema central de esa situación.

b) En palabras del grupo, describir el problema que se identificó.

4. Describir los modos de entender por los profesores del RELATO, los conceptos de fracción, razón y proporción así como los modos de abordar su enseñanza.

5. Una vez desarrollados los ítemes anteriores, vaya a la lectura del ANEXO A de esta unidad. Luego de la lectura, vuelva a plantearse las preguntas 1,2,3 y4.

ANÁLISIS DE PROBLEMAS PRESENTES EN EL REGISTRO

PRIMERA PARTE: UN MODELO DE ANÁLISIS

A continuación, se seguirá una secuencia de cuatro pasos a modo de ejemplo de un modelo de análisis que permita abordar el estudio crítico que se propone para los problemas que presenta el relato. Para esto se presenta el análisis de un segmento en cuatro pasos : se describe lo más fielmente posible la situación en la que se inserta uno de los problemas posibles de identificar en el segmento (en el segmento seleccionado dice relación con la docente de ciencias naturales, quien habla de su tarea de enseñar a convertir unidades en química y física, para lo que requiere del uso de matemáticas) ; luego se delimita el problema presente en la situación buscando un título que facilite su identificación ; a continuación se describen ideas y representaciones que subyacen a las expresiones vertidas por los profesores en el segmento. Por último se levantan alternativas didácticas a la situación en análisis.

SEGMENTO PARA ANALIZAR

"**Marta :** En química es necesario el uso de proporción y fracción en conversiones de unidades. Eso les cuesta y tengo que explicar las matemáticas para llegar a un simple factor unitario.

Lino : Eso no es proporción.

Marta : No, es factor unitario.

Oscar: Así el cabro no lo va a entender, matemáticamente no lo va a entender. Hay confusión. "

[Párrafos 2, 8-10]

1. SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

En el segmento interactúan la profesora que enseña química y dos de los profesores que enseñan matemática, todos en un mismo establecimiento. La profesora que inicia este segmento presenta su problema para poder llegar a enseñar a sus alumnos "un simple factor unitario", en el contexto de sus clases de química y referidas a dimensiones provenientes de la física, para alumnos de octavos básicos y primeros años medios del colegio. El grupo trata de identificar la o las nociones comprometidas en el "factor unitario", desde sus respectivos campos disciplinares, quedando planteadas discrepancias de los significados y de su manejo en cada campo. Constatan además cómo éstas discrepancias serán generadoras de obstáculos para el logro de su aprendizaje por parte de los y las estudiantes.

2. TÍTULO

Como lo que gatilla la conversación es el objeto buscado por la docente de ciencias naturales, un título que identifica el problema didáctico que genera su enseñanza es

EL FACTOR UNITARIO: SIGNIFICADOS Y USOS
EN SUS PROPIOS CAMPOS Y EN EL DE LA MATEMATICA

3. IDEAS Y REPRESENTACIONES PRESENTES EN EL SEGMENTO

Entre otras ideas y/o representaciones que estarían manejando los docentes del relato es posible establecer, a modo de hipótesis, las siguientes

a. Para convertir unidades en el campo de la química y la física debe usarse las herramientas matemáticas de proporción y fracción.

b. Las herramientas que posibilitan el cambio de unidades en el campo de la química y la física son los "factores unitarios". Estas son nociones propias del campo de las ciencias naturales.

c. En el campo de las ciencias naturales los "factores unitarios" son objetos simples que se pueden determinar mediante el uso de las nociones matemáticas de proporción v fracción.

d. La profesora se representa que las dificultades de comprensión del "factor unitario" se deben a una carencia de entendimiento relativo a proporción y fracción por lo que se ve obligada a salir de su campo propio y tener que explicar esas temáticas.

e. Los docentes de matemáticas descubren que las técnicas y signos que usa la docente no se corresponden con la noción matemática de proporción, constituyéndose en obstáculos para la comprensión de los alumnos.

4. ALTERNATIVAS DIDACTICAS A LA SITUACION EN ANALISIS

a. Campos disciplinarios

En el segmento de conversación que citamos al inicio, pueden distinguirse con claridad dos campos disciplinares distintos, con sus conceptos y técnicas propios : los campos experimentales de la química y la física y el campo "formal" de la matemática usada en el aula.

Cada docente entra en la conversación desde la perspectiva que su disciplina le aporta. Este segmento muestra la relevancia que reviste el detenerse para poner en común las diversas categorías que cada docente usa en esas distintas disciplinas, así como el significado con el cual las usa. En este caso, los docentes de matemática podrían hacerse las preguntas primero de modo individual y luego ponerlas en común en el grupo

¿ Qué son para mi la fracción, la razón y la proporción ?
¿ En qué se diferencian ? ¿ En que se relacionan ?
¿ Qué es para mi un "factor unitario" ? ¿ Había oído hablar de él ? ¿ Qué significa desde el campo disciplinar de la colega que lo mencionó ?

De modo análogo los/las colegas de otros campos disciplinares podrían preguntarse, para luego compartir en el grupo, en que se utiliza la herramienta de los FACTORES DE CONVERSION

¿ Qué es para mí un "factor unitario" ? ¿ Qué significa en mi campo disciplinario ?
¿ Qué son para mí la fracción, la razón y la proporción ?
¿ En qué se diferencian ? ¿ En que se relacionan ?
¿ Cómo se relacionan con el " factor unitario " ?

Aclarados los significados propios a los campos, establecer una reflexión tendiente a elaborar secuencias didácticas pertinentes desde cada una de las asignaturas. De este modo se potenciarán más sinérgicamente los esfuerzos didácticos respectivos.

b. Conceptos en relación

Al desligar en la enseñanza, las nociones de fracción, razón y proporción, se deja un vacío que difícilmente podrán resolver los alumnos y las alumnas. Para recurrir al uso del "FACTOR DE CONVERSION", éstos deben manejar con fluidez el paso entre cada una de esas nociones. La fracción será necesaria para el trabajo más operatorio, en tanto que razón y proporción lo serán para los momentos en que dan significación y coherencia en el campo matemático, a unas relaciones que se han establecido en otro campo.

Es importante observar como el "FACTOR UNITARIO" va a tensionar en los estudiantes el grado de comprensión de las nociones indicadas así como la fluidez de su tránsito entre ellas

¡ lm/ 100 cm y también 100 cm/ lm están en una razón cuya magnitud es 1 en el campo disciplinar de ciencias fácticas como la física o la química ! !

De este modo observamos como la misma reflexión de los docentes, en cuanto a distinguir explícitamente el campo propio de las distinciones con las que se esté trabájando, es imprescindible llevarla a cabo con los estudiantes.

SEGUNDA PARTE: ANÁLISIS DE OTROS PROBLEMAS PRESENTES EN EL REGISTRO

1. Para cada uno de los siguientes tres segmentos

a) Identificar el problema planteando preguntas al segmento, problematizándolo primero de modo individual y luego grupalmente.

b) Asignar a cada segmento un título pertinente a juicio del grupo.

c) Levantar hipótesis de representaciones presentes en el segmento.

d) Buscar y proponer alternativas didácticas que apunten a resolver los problemas identificados.

SEGMENTO 1

"**Oscar :** Lo que pasa es que es el viejo problema de que los alumnos despejan la x. Tienen aterrizado lo de dejar la x sola, pero ¿ qué es la x ? ¿ segundos o minutos ?

Lino : Le están facilitando la mecanización. Te responde 180, pero 180 qué...

Blanca : Aquí faltó definir la x. Hay que decir que las x son los segundos. (...) Hay que definir que significa la incógnita. Ahí no termina el ejercicio. El ejercicio se resuelve diciendo que "tres minutos son 180 segundos". "

[Párrafos 15-17, 201

SEGMENTO 2

" (Lino añade al lado derecho de la pizarra : $\frac{1 \text{ mín}}{60s} = \frac{3m}{x\ s}$

Oscar: ¿ Cuándo trabajas con esta ? (Se refiere a la igualdad $\frac{1 \text{ min}}{3m} = \frac{60s}{xs}$

Casi nunca. ¿ Y cómo la lees ? "1 minuto es a 60 segundos como 3 minutos es a x segundos" i Igual que la anterior! (refiriéndose a la oralidad previa de su colega).

Lino: ¿ Cómo lo leo ? No me cuadra"

[Párrafos 23-251

SEGMENTO 3

" **Oscar : (...)** Uno en matemática le insiste mucho que se comparan cantidades iguales. Poner minuto y segundo produce confusión.

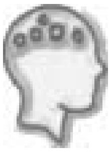
Lorena : Tengo problema con el concepto razón (...) Nunca lo había hecho con unidades diferentes... siguen siendo razones. "

[Párrafos 10, 30, 361

2. Una vez desarrollado el ítem anterior, vaya a la lectura del ANEXO B. A la luz de la información que entrega esta lectura, complemente los hallazgos hechos por su GPT en el punto l.

3. Lea nuevamente el RELATO presentado al inicio de la unidad e identifique otros problemas, que a su juicio, sean relevantes para discutir con sus colegas.

ANEXO A



PRIMERAS INTERPRETACIONES DESDE EL RELATO

En el relato de la conversación se aprecian algunos elementos generales, que a continuación se desarrollan, manteniendo una estrecha cercanía con éste. Algunos de éstos elementos son

- Los profesores tienden a enseñar la fracción en un contexto de operatoria numérica, desligada de otras nociones asociadas al concepto de fracción, en especial del concepto de razón y al de proporciones. Ello obstaculiza la transferencia del concepto a otros contextos no matemáticos, como puede constatarse en esta misma conversación.

- Las razones consideradas en su noción de comparación de magnitudes homogéneas constituye solo una de las facetas posibles de éstas (para más detalles vea la UNIDAD III de este módulo). El estudiante necesita - ya sea en la vida cotidiana o en otras áreas temáticas - relacionarse con comparaciones de magnitudes heterogéneas, tales como km/h, lt/seg, gr/cm^3.

- Los ejemplos de comparaciones de los docentes se encuentran en contextos de matemática más bien clásicos y que por ende aluden a situaciones estáticas y de orden geométrico. La matemática moderna se interesa en una razón muy particular: la razón de cambio - cuya raíz viene de un contexto físico- dando sentido a las comparaciones de unidades diferentes tales como unidades propias a las dimensiones de distancia y de tiempo. Por su parte, en el campo de la química por ejemplo surge la noción de densidad, comparación de cantidades cuyas unidades son unidades de masa y unidades de volumen.

- La matemática se utiliza en otros campos disciplinarios como la física y la química, lo cual implica que un mismo concepto matemático se corporaliza en diferentes entidades. Por ejemplo en el relato, en el campo químico, una razón específica es denominada factor unitario. A *veces el alumno debe usarla antes que el profesor de matemática la haya enseñado en su clase. Otras veces, aunque haya visto el contenido de razón en matemática, no le presenta allí este caso particular.*

- Ello muestra entre otros aspectos, la necesidad de establecer un grupo de conversación estable de los profesores de matemática del establecimiento, en el cual se inviten a colegas de diversas áreas disciplinarias. Ello favorecerá estrategias que se potencian en el objetivo del mayor y mejor logro de aprendizajes de los alumnos, al determinar corporalizaciones de las fracciones, razones y proporciones en esas otras áreas disciplinarias.

- Distintas representaciones de la matemática se estarían jugando en este relato particular, de modo que facilitan u obstaculizan un abordaje didáctico más pertinente para la temática de fracciones, razones y proporciones. La matemática se entendería como una disciplina a ser enseñada según una secuencia de dos momentos separados entre sí : un primer momento para entender, para comprender - momento de lo "conceptual", de lo relacional - y otro segundo para operar - noción que los profesores se representan como un momento mecánico, sin pensamiento y de orden más bien concreto.

- Esa separación es ahondada por la ruptura entre la enseñanza básica y la enseñanza media, entre la asignatura de matemática y las otras asignaturas. En 8° no se explicitaría la relación de las fracciones con las razones y las proporciones. En 1 ° medio las fracciones se verían desde su faceta operatoria, al servicio del momento abstracto que estaría aquí representado por el álgebra. Un desafío pendiente es revisar y superar esta situación en las prácticas docentes cotidianas.

ANEXO B

EVALUAR Y CUANTIFICAR, TAREA COTIDIANA EN LA INDUSTRIA

En el área de la industria los productos son fabricados esencialmente mediante procesos basados en principios químicos y físicos. Un proceso típico se analiza bajo aspectos interdepend¡entes, entre los cúales se encuentra el de las operaciones unitarias. Estas últimas consisten en analizar todas aquellas etapas de un proceso o línea de producción que siempre van a involucrar etapas de transformación física o físico-química, como son por ejemplo : el secado de fruta para su posterior almacenaje y consumo (operación unitaria de secado) y el transporte de productos como pulpas de frutas, jugos, leche y otros (operación flujo en tuberías).

En todas ellas está implícita la idea de evaluar, de cuantificar, de conocer sus variables de operación y saber cómo afectan al producto. Los ejemplos más sencillos del manejo de las unidades de las variables de operación comunes en la industria son : masa, longitud, tiempo, fuerza, peso, concentración, densidad, presión, velocidad, viscosidad, temperatura.

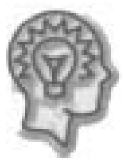
A juicio de docentes de asignaturas de primeros semestres de carreras técnicas, tecnológicas o cientifico-técnológicas de nivel medio y superior, una importante fuente de error en los cálculos suele provenir de un mal manejo o un manejo descuidado de las dimensiones y unidades. Comencemos por diferenciar ambas nociones. Dimensión refiere a esas magnitudes que dan cuenta de un conjunto de fenómenos propios de un área disciplinar tales como las disciplinas de la física o la química. Masa, longitud y tiempo son dimensiones fundamentales de la física. Concentración, densidad, viscosidad, temperatura son dimensiones propias de la química.

¿ Cómo medimos la magnitud de una de tales dimensiones ? Usando cantidades fijas de referencia para medir al interior de una dimensión dada. Si tomamos por ejemplo la dimensión de la masa, tendremos a nuestra disposición unidades tales como KILOGRAMO y LIBRAS según sea el "Sistema de Medidas" que se adopte. Para la dimensión de longitud podremos usar METRO y CENTIMETRO en un sistema o PULGADAS y MILLAS en otro. Un problema puede hacer necesaria una conversión de unidades, al interior de un mismo sistema de medidas o entre sistemas de medidas. Los docentes experimentados sugieren un "Método de Trabajo" para no caer en confusión, el que consta básicamente de dos reglas

a) Siempre incluir las dimensiones en cualquier cálculo que se realice ;

b) Convertir las dimensiones presentes en el problema en las que usted desee en su respuesta *multiplicando o dividiendo por 1.*

En este contexto entonces surge la importante herramienta del "FACTOR UNITARIO" o "FACTOR DE CONVERSION". Son ejemplos de factores unitarios : (1 metro) / (100 centímetros) y (1, 609 kilómetros) / (1 milla). Abreviando son 1 m/ 100 cm y 1, 609 Km / 1 mi ii Pero también lo son 100 cm/ 1 m y 1 mi/ 1, 609 Km!!

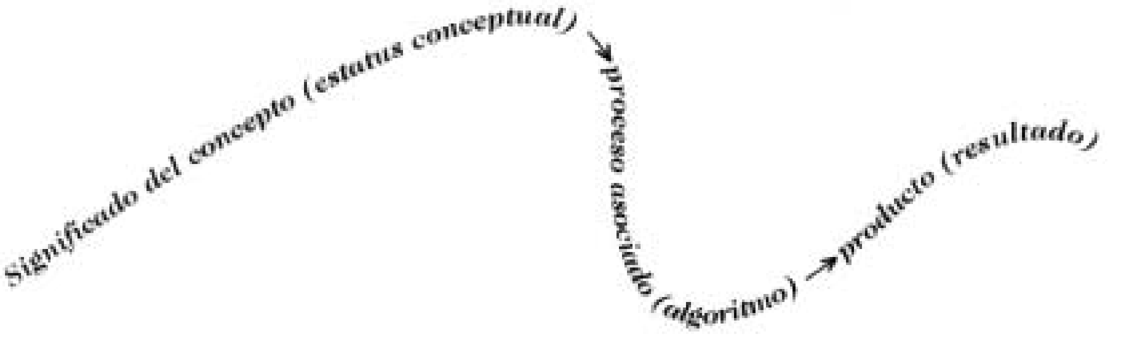


SEGUNDA SESIÓN

Construyendo una mirada global

Considerando la heterogeneidad de nuestros alumnos y alumnas, y de sus trayectorias escolares, se presenta a continuación una sistematización - entre varias posibles - de facetas de las fracciones, con las que pudiesen haberse encontrado. Si bien algunas de estas facetas pudieran asociarlas a sus primeros pasos con las fracciones, ***vistas en conjunto*** *favorecen una mejor comprensión del concepto de fracción, enriqueciéndolo.*

PARA MUCHOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS SE DISTINGUE LA SECUENCIA



Esta distinción nos ayuda como maestros a buscar estrategias didácticas de modo que *los algoritmos no se conviertan en reglas sin sentido para los alumnos y alumnas. Es* la falta de significatividad la que favorece la mayor parte de *los errores*[1] en los procedimientos que exhiben muchos de ellos, lo que se hace particularmente notorio al operar con las fracciones. Una traslación demasiado rápida hacia el manejo de símbolos sin un fundamento suficientemente concreto y natural a los algoritmos de las operaciones, no permite al alumno hacer propio un esquema conceptual o modelo de comprensión. De este modo entonces, aumentar el tiempo de práctica en el manejo del algoritmo carente de comprensión, no lleva a dar significado a los pasos de dicho algoritmo.

Cuánto más importante se hace, detenernos en la elaboración de significados por parte de los alumnos y las alumnas, si al trabajar con la fracción, contemplando cada una de sus diferentes facetas, tenemos entre manos un *megaconcepto,* al decir de los autores Llinares y Sán-

1 Entre los errores sistemáticos más comunes, investigaciones los localizan en la equivalencia de fracciones/operaciones, en la adición y sustracción, en la multiplicación y división (Llinares y Sánchez, pp. 155-164, 1988). Destaca, como obstáculo subyacente a los errores, la DIFICULTAD DE TRANSITAR DE LOS NUMEROS NATURALES A LOS FRACCIONARIOS. Por ejemplo:

- Volver al contexto de los naturales y tratar por separado numeradores y denominadores en las sumas;
- Forzar el algoritmo de la multiplicación de modo que el resultado sea mayor como ocurre en los naturales.

chez (1988, p 54). A nuestros alumnos y alumnas debemos ofrecerles suficientes oportunidades para que establezcan esa red de significados que vaya articulando cada una de las facetas y manipulaciones asociadas al objeto matemático de fracción. Los que aquí se esbozan, esperan ser un aporte que despierte a más y mejores búsquedas didácticas que nos lleven al asombro ante la complejidad de un tema que ha estado desde nuestra primera escolaridad con cada uno de nosotros.

ANÁLISIS DE LA PRACTICA EN EL AULA

1. Recuerde y describa la oportunidad más reciente en que usted enseñó el concepto de fracción : ¿ Qué pasos distinguió usted como constitutivos del proceso de enseñanza del concepto ? ¿ Cómo motivó ? ¿ Qué papel le asignó a los alumnos ?

2. Utilice las variables que se encuentran en la siguiente Tabla para sistematizar la descripción efectuada por usted.

VARIABLES	LA ENSEÑANZA DE LA FRACCION
Punto de partida	
Métodos	
Pregunta en torno a la cual organiza una secuencia de enseñanza y aprendizaje	
Propósito de enseñanza	
Secuencia de las ilustraciones, conceptos y aplicaciones	
Ámbito favorecido: los contenidos versus la actividad de los alumnos	

3. A la luz de lo descrito por usted en la pregunta anterior, juzgue si la forma como usted enseñan la fracción se acerca más a la enseñanza de la matemática como producto (enseñar los conceptos establecidos de la matemática) o a la matemática como proceso (ofreciendo espacios para que los alumnos piensen, busquen, se equivoquen, pongan en juego sus intuiciones). ¿ Por qué ?.

4. Vaya a la LECTURA del ANEXO C, al final de esta unidad. Pág. 47.

5. De acuerdo al juicio y su lectura anteriores : ¿ Qué elementos cambiaría ? ¿ Por qué ? ¿ Qué necesita para efectuar ese o esos cambios ?

EL MEGACONCEPTO DE FRACCION

Desde el punto de vista de la didáctica centrada en la actividad de los alumnos y alumnas, la matemática se entiende como un medio para aprender a pensar y resolver problemas. Para ello, se pone especial énfasis en presentarla como una actividad útil y entretenida. Eso necesariamente implica que no se busca un operar mecánico, aunque sea correcto matemáticamente, sino que los alumnos y alumnas puedan vislumbrar soluciones viables de ser implementadas prácticamente. Por ejemplo, en el caso de las fracciones no es lo mismo repartir tres frutas entre cinco personas, que tres lápices en cinco personas ; tampoco se puede plantear como equivalente la mitad de un queque con la mitad de una sala (cf. Segura y Romero, pág 16).

Cuando abordamos la fracción como contenido didáctico desde una perspectiva fenomenológica, es necesario hacer notar su complejidad, la cual es tal, que, como dijimos anteriormente, algunos autores se refieren a la fracción como un megaconcepto.

Constituir este megaconcepto en familias de *fenómenos* que se puedan articular en *objetos mentales (si* tiene alguna duda respecto a estos conceptos, vuelva al ANEXO C), supone un proceso de análisis que nos permita desentrañar las dimensiones y facetas que lo componen. Eso es lo que abordaremos en los párrafos siguientes.

En el megaconcepto de fracción, en un primer acercamiento, podemos distinguir dos dimensiones, las que se enuncian en la siguiente tabla

TABLA N° 1 : DOS DIMENSIONES DE LA FRACCION

DIMENSIONES	EJEMPLOS DE FENÓMENOS
DINÁMICAS	Acciones de producir fraccionamientos, repartir, juntar, medir, comparar.
ESTÁTICAS	Medidas, relación de medidas, tasas, Resultado exacto de una división.

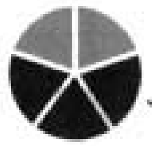
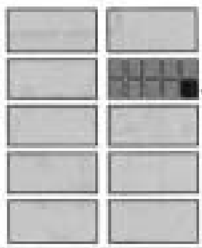
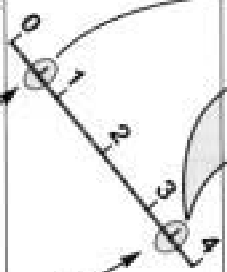
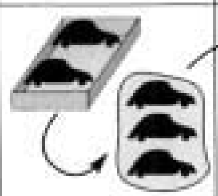
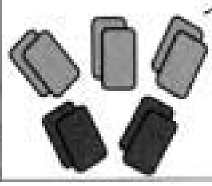
Al profundizar nuestra mirada, focalizando en la dimensión dinámica, podemos establecer las constataciones que se detallan a continuación.

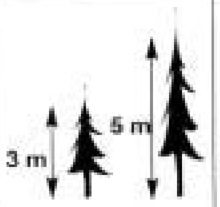
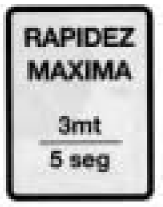
TABLA N° 2 : FACETAS DINÁMICAS DE LA FRACCIÓN

FENOMENOS *Acciones*	**PRESENTACIONES (Para su enseñanza)** *Animaciones*
Producir fraccionamientos Se pueden cortar en partes iguales :	
• Objetos cotidianos ◄—►	• Trabajador con sierra cortando madera
• Objetos estándares ◄—►	• Estudiantes cortando una cuerda
• Objetos geométricos ◄—►	• Estudiantes dibujando puntos de corte a un segmento de línea.
Cortar y repartir Cortar objetos en partes iguales y luego repartir algunas de esas partes :	
• Repartir 3 barras de chocolate del mismo tipo entre 5 niños. ◄—►	• 5 estudiantes se reparten 3 barras de chocolate del mismo tipo
• Cortar una de barra de chocolate del tipo anterior en 5 y partirla en 3 ◄—►	• Un (a) estudiante corta una barra de chocolate en 5 y su compañero (a) reparte 3 de los trozos
Medir Comparar la magnitud de una dimensión de un objeto respecto de una magnitud referente	Los estudiantes en grupos, eligen distintas unidades referentes y anotan sus medidas
• Determinar el largo de una escoba con una huincha de medir. ◄—►	• De longitud
• Encontrar la capacidad de un envase de bebida respecto de la capacidad de una pistola de agua. ◄—►	• De volumen
Operar El operador **a/b** actúa sobre una situación y la modifica :	
• Señala la acción de multiplicar por **a** una magnitud y luego dividirla por **b**, o a la inversa. ◄—►	• Los alumnos señalan segmentos de longitud dada **s**, sobre la recta numérica, los cortan en **b** partes y toman **a** de esas partes.

Si continuamos profundizando, pero ahora focalizamos en la faceta estática, podemos constatar un cuadro como el siguiente, en el que mostramos presentaciones en tres tipos diferentes de registros, a saber, gráfico, numérico y verbal

TABLA N° 3 : FACETAS ESTÁTICAS DE LA FRACCIÓN

FENOMENOS	PRESENTACIONES (Para su enseñanza)		
Resultados	Registro Gráfico	Registro Numérico	Registro Verbal
MEDIDA Indica la relación entre una cantidad de partes y la cantidad total de partes.		Número que representa la relación	
Todo continuo • De las 5 partes del todo se colorearon 3.		3/5	• Tres quintos
• De las 10 partes del todo se ha tomado 1. Esta se ha dividido otra vez en 10 y se ha tomado solo 1 de las partes resultantes.		1/100 0,01	• Un cien avo • Un centésimo
Se cortó 4 segmentos unitarios consecutivos en 5 y se ubicaron los puntos : • Tres quintos • Tres unidades y media.		3/5 3 1/2 3,5	• Tres quintos • Tres enteros, un medio • Tres enteros y cinco décimos
Todo discreto • De sus 5 autos de juguete, Pablo juega con 3.		3/5	• Pablo juega con tres de sus cinco autos
• De 5 pares de cartas, el juego se inicia con un par para cada uno de los tres jugadores.		3/5	• Repartieron tres pares, de un total de cinco pares

FENOMENOS	PRESENTACIONES (Para su enseñanza)		
Resultados	Registro Gráfico	Registro Numérico	Registro Verbal
RELACIÓN RAZON : Indice comparativo de dos cantidades. El indice puede referirse a • Cantidades de una misma magnitud	 	→ 3/5 →	• Tres es a cinco
• Cantidades de distinta magnitud	 	→ 3mt/5sg →	• Tres metros es a cinco seg.
ESTADO DE COSAS Resultado de aplicar el operador **a/b** sobre cantidades.	$1 : 3$ $\frac{1}{3} \times 2$ $\frac{2}{3}$	$1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	*Al estado inicial* **1** *le aplico el operador* **2/3** *y obtengo el estado final* **2/3**
RESULTADO EXACTO DE UNA DIVISIÓN • Division indicada.		→ 3 : 5 → 3 / 5 →	• Tres dividido cinco • Tres quintos
• Es el resultado de dividir una cantidad en un número de partes dadas	*Abstracción matemática*	→ 0,6 →	• Seis décimos

Para la perspectiva fenomenológica " Las fracciones no son más que notaciones y los matemáticos del pasado podrían haber escogido otras. Lo esencial no es explicar estas notaciones... sino más bien los numerosos *fenómenos* que se pueden explicar con su ayuda... " (Rouche, 1996)[2]. Los fenómenos exhibidos en las tablas anteriores ejemplifican algunas de las facetas de las fracciones, en una doble dimensión dinámico / estática : fraccionamientos / partes de un todo continuo o discreto ; medir / medidas ; comparar / índices de comparación ; operar / resultados de operar. Cada una de ellas puede expresarse usando una misma notación de fracción. Estas facetas constituyen objetos mentales de la fracción cuando la analizamos desde una perspectiva fenomenológica. La próxima tabla resume tales facetas en una secuencia que va desde un nivel más concreto a otro más abstracto.

2 Versión traducida por Isabel Soto.

TABLA N° 4 : ALGUNAS FACETAS DE LAS FRACCIONES

DINAMICAS	ESTATICAS
Fraccionar Cortar un objeto en partes iguales y luego repartir algunas de esas partes : • *Cortar una barra de chocolate en 5 y repartir 3 de sus trozos*	**Partes de un todo** • Continuo • Discreto
Medir Comparar la magnitud de una dimensión de un objeto respecto de una magnitud referente <u>Todo continuo</u> • Determinar el largo de una escoba con una huincha de medir. • Encontrar la capacidad de un envase de bebida respecto de la capacidad de una pistola de agua. <u>Todo discreto</u> • Elegir objetos o pares de objetos a partir de una colección de objetos	**Medida** Indica la relación entre una cantidad de partes y la cantidad total de partes. <u>Todo continuo</u> • Medida de longitud • Medida de capacidad o volumen <u>Todo discreto</u> • De sus 5 autitos de juguete, Pablo juega con 3. • De 5 pares de cartas, el juego se inició con un par para cada jugador.
Comparar Comparar : • Cantidades de una misma magnitud • Cantidades de distinta magnitud	**Relación de comparación** RAZON : Indice comparativo de dos cantidades. El índice puede referirse a • Cantidades de una misma magnitud • Cantidades de distinta magnitud
Operar • **Aplicar el operador a/b** sobre una situación : acción de multiplicar por a una magnitud y luego dividirla por **b**, o a la inversa. • **Dividir**	**Resultado de operar** a) **Estado de cosas :** Resultado de aplicar el operador **a/b** sobre cantidades. b) **División indicada / Resultado exacto de una división :** Es el resultado de dividir una cantidad en un número de partes dadas.

En la tabla siguiente se presentan manipulaciones con fracciones unitarias : contar, ordenar, sumar y multiplicar ; manipulación con fracciones equivalentes : buscar operadores equivalentes ; sumar y multiplicar fracciones distintas. Ella responde a la preocupación por ofrecer ejemplos, de modo que - como docentes- demos posibilidades de establecer una red rica en significados personales que permita a los alumnos y alumnas ir haciendo suyas facetas del concepto de fracción. Sobre la base de este fundamento más concreto y natural, que culmine en un megaconcepto - suerte de síntesis personal de las distintas facetas u objetos mentales de cada alumno- mucho más adelante conocerán las fracciones en su estatus de números, constituyendo el objeto matemático de cuerpo algebraico ordenado de los números racionales.

TABLA N'6: MANIPULACIONES CON MAGNITUDES FRACCIONADAS[3]

Manipulaciones	**Contextos** (Ejemplos de acciones para los que aprenden)		
	Kinestésico	**Oral**	**Simbólico** Registro y/o Cálculo
Contar con fracciones unitarias	seis niños doblan en cuatro partes iguales dos hojas de papel. Cada uno colorea, desde una hasta seis regiones, de magnitud un cuarto	Contar en voz alta : " un cuarto, dos cuartos, tres cuartos, cuatro cuartos, cinco cuartos, seis cuartos,... "	Fracciones propias 1/4, 2/4, 3/4 Unidad (todas las partes) 4/4 Fracciones impropias 5/4,6/4....
Ordenar fracciones unitarias	se divide en cuatro cada segmento unidad de la recta numérica. Usando la longitud se da nombre a cada uno de los puntos identificados.	Nombrar cada punto en voz alta " un cuarto, dos cuartos, tres cuartos, cuatro cuartos, cinco cuartos, seis cuartos,... "	1/4<2/4<3/4<4/4<5/4<6/4
Sumar fracciones unitarias	seis niños doblan en cuatro partes iguales dos hojas de papel. Cada uno colorea seis regiones, de magnitud un cuarto	Pedir respuestas en voz alta a la pregunta ¿ Cuánto hay si a un cuarto, añado otro cuarto, y otro cuarto, y... ?	1/4+1/4+1/4+1/4+1/4+1/4 = 6/4 = 11/2 = 1 + 1/2 =1,5

3 Resulta difícil corporalizar conceptos a nivel kinestésico, sin embargo sigue siendo un desafío a enfrentar como Grupo Profesional de trabajo.

Manipulaciones	Contextos (Ejemplos de acciones para los que aprenden)		
	Kinestésico	**Oral**	**Simbólico** Registro y/o Cálculo
Multiplicar una fracción unitaria por un natural		Pedir respuestasr en voz alta a la pregunta ¿ cuánto resulta seis veces un cuarto ?	6 x 1/4 = 6/4 = 11'2 = 1,5 =1/4+1/4+1/4+1/4+1/4+1/4
Manipular fracciones equivalentes	Buscar operadores que, a partir del mismo estado inicial, den por resultado el mismo estado final		Estado Inicial / Operador / Estado final 12 / X (2/3) / 8 12 / X (4/6) / 8 12 / X (8/12) / 8
	Determinar operadores unitarios		2/2, 515, –.. c/c, c no nulo
Adición de fracciones (fracciones distintas)			Algoritmo Buscar múltiplos del denominador mayor que también lo sean del menor. Con él construir el operador unitario, aplicarlo a ambas fracciones y sumarlas.
Multiplicación de fracciones	Determinar áreas Buscar procedimientos y encontrar soluciones Componer operadores		2 1/2 x 3 1/3 = 25/3 3/4 de doce huevos permitió hacer tres queques de 3 huevos cada uno Tomar los 2/3 de los 3/4

REFLEXIONES SOBRE LOS APRENDIZAJES

1. Reflexione sobre los errores más comunes que usted identifica en los aprendizajes de las fracciones, por parte de los alumnos.

2. Clasifique los errores identificados en tipos, de acuerdo con rasgos comunes.

3. Explique, considerando los elementos tratados en esta unidad, a qué atribuiría usted, dichos tipos de errores.

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDACTICA

Una secuencia didáctica se encuentra inserta en un contexto temático determinado y se caracteriza por tener una intencionalidad particular, alcanzable en un tiempo delimitado. En ella podemos distinguir tres momentos

Inicio o motivación
Desarrollo, y,
Conclusión.

Cada uno de estos momentos puede estar constituido por diferentes pasos y/o actividades.

Considere, por un **lado, los elementos contenidos en las Tablas** N'4: " ALGUNAS FACETAS DE LAS FRACCIONES ", y, N'5: " MANIPULACIONES CON MAGNITUDES FRACCIONADAS " : Por otro **lado, considere las características de sus alumnos** de primero medio.

Diseñe una secuencia didáctica teniendo presente las perspectivas anteriores. Una vez elaborada, le sugerimos someterla a la evaluación de su Grupo Profesional de Trabajo.

ANEXO C

HACIA UN ENFOQUE FENOMENOLOGICO EN LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES

Desde una perspectiva fenomenológica (Freudenthal, 1988) se habla que los conceptos matemáticos pueden abarcar y dar sentido a distintos objetos mentales. Dichos objetos mentales ordenan, a su vez, conjuntos de fenómenos. Esta propuesta didáctica, que consideramos apropiada para la enseñanza de la fracción, a grandes rasgos, supone la constitución de tres momentos.

El primero se relaciona con el planteamiento de fenómenos, es decir, "todo tipo de relación... entre conjuntos, formas, magnitudes o números y que se presenta al espíritu como materiales y puntos de apoyo del pensamiento matemático" (Soto, pág. , 2). En otras palabras, este momento significa partir de lo concreto.

El segundo, tiene que ver con la constitución de los objetos mentales. Los fenómenos se organizan sobre la base de rasgos comunes y se les construye como objetos matemáticos informales. Lo concreto se clasifica sobre significados relativamente comunes.

Finalmente, se encuentra la formalización de los objetos mentales arribando a conceptos definidos de acuerdo con un lenguaje de orden matemático.

En la didáctica fenomenológica se propone un cambio de enfoque que implica enfrentar situaciones cotidianas, en que es posible y necesario el uso de un conocimiento matemático, creando la condición para que, enfrentándose a una familia de fenómenos, los alumnos y alumnas descubran y construyan mentalmente la relación que tienen en común, es decir, el objeto mental. Sólo así la formulación del concepto matemático puede tener sentido y referencia concreta.

Desde esta visión, el desafío didáctico consiste en crear las condiciones para identificar aquellas familias de fenómenos, vinculados al tema de fracciones, que permitan a alumnos y alumnas construir objetos mentales necesarios y suficientes para comprender tanto los conceptos involucrados como la operatoria y su aplicación práctica.

Ahora bien, hay que tener cuidado en que en el afán de facilitar la comprensión conceptual, el profesor esté desvirtuando lo que significa resolver un problema matemático. Pareciera que existe consenso entre los especialistas en señalar

que, en la enseñanza de la matemática, "todo no puede remitirse a lo concreto. Estrictamente hablando, podríamos afirmar que mientras las matemáticas estén articuladas indisolublemente con lo concreto todavía no son matemáticas" (Segura y Romero, pág 10).
Sin embargo, esto no invalida que, didácticamente, sea necesario ir desarrollando un proceso inductivo, desde la actividad de los alumnos, que permita alcanzar significativamente la dimensión más abstracta de los conceptos matemáticos, tal como es posible desde la perspectiva fenomenológica. Este enfoque de enseñanza de la matemática se encuentra entre aquellos cuyo centro es la actividad del alumno. En otro extremo es posible identificar aquellos cuyo foco es el contenido matemático a ser enseñado.

Para mayor claridad, en la tabla siguiente se presentan, en sus características polares, los dos tipos de concepciones para la enseñanza de la matemática que fueron enunciadas en el párrafo anterior, a fin de tener mayor claridad en torno a los desafíos que implica adoptar una perspectiva fenomenológica en la didáctica de las matemáticas.

TABLA SÍNTESIS: ELEMENTOS QUE DISTINGUEN DOS TIPOS DE CONCEPCIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

VARIABLES	LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA COMO PRODUCTO	LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA COMO ACTIVIDAD DE LOS ALUMNOS Y ALUMNAS
Punto de partida	La estructura de la materia	El proceso de invención desde la perspectiva de los estudiantes.
Métodos	Deductivos.	Inductivos.
Pregunta en torno a la cual se organiza el currículo	La edad en la cual se puede adquirir una idea o concepto matemático determinado.	El proceso requerido para el aprendizaje de un concepto.
Propósito didáctico	Adquisición de conceptos.	Organización de fenómenos y la constitución de objetos mentales.
Secuencia didáctica	Primero los conceptos, luego las aplicaciones.	Primero las ilustraciones, luego los conceptos.
Ambito favorecido	El cognitivo. El contenido a aprender tiende a presentarse de manera despersonalizada, descontextualizada y atemporalmente.	El experiencia¡, pues imagina situaciones que los alumnos puedan vivir y en las cuales los conocimientos surgirán como la solución óptima.
Relación con el saber	Elimina su historia, dejando de lado las preguntas y dificultades que han provocado la aparición de conceptos fundamentales.	Rescata los errores y caminos erráticos de los alumnos en la perspectiva de favorecer un descubrimiento guiado.

TERCERA SESIÓN

Razones y proporciones
Algunos elementos

En esta unidad se presentan algunos elementos sobre razones y proporciones con el objeto de favorecer nuevas miradas para su enseñanza. El hilo conductor de los aspectos elegidos encuentra su explicación en los temas levantados por los profesores en el relato presentado en la primera unidad. Estos aspectos dicen relación con los conceptos mismos, como se relacionan, sus aplicaciones y, en particular, con las dificultades para abordar el cambio de unidades en contextos de ***uso de otras disciplinas distintas*** *a la matemática.*

PRIMERA PARTE: RAZONES

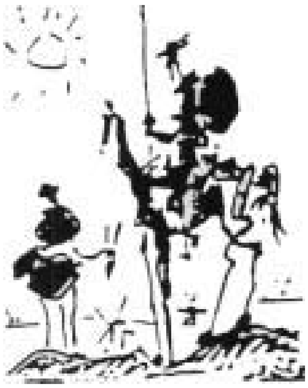
Lorena: " *Nunca lo había hecho con unidades diferentes... siguen siendo razones* "
[Párrafos 30 y 36]

Forma parte de nuestra experiencia cotidiana la capacidad de reconocer cuándo dos objetos " de una misma naturaleza " -en el sentido de alguna de sus características tales como su longitud o su peso por ejemplo- son equivalentes o no, y en este último caso, cual es más grande respecto de la característica observada. De igual modo, si observamos un diseño y su ampliación o su reducción somos capaces de distinguir alguna distorsión, en el sentido del respeto a las proporciones del objeto original.

Si procedemos a medir cada una de las dimensiones del objeto reducido o ampliado -operación que a veces solicitamos a una fotocopiadora para efectos de elaborar material para una clase- y comparamos dividiendo de a pares, las medidas de cada parte correspondiente al objeto original respecto del modificado, constataremos que se obtiene un mismo valor. A este valor se le llama la " escala " de la reproducción. En matemáticas este hecho se expresa diciendo que una reproducción presenta una " razón " de paso de una figura a la otra y a este valor se le llama " razón externa ".

Por su parte, si comparamos dividiendo de a pares, partes del mismo objeto en el original y luego en el modificado, obtenemos un mismo valor en cada caso. En matemáticas se expresa esta situación señalando que las " razones internas " se preservan en un diseño a escala.

Dicho de otro modo, hay una relación entre la existencia de una razón externa y la conservación de las razones internas : por un lado, una reproducción a escala respeta las proporciones, las formas. Por otro lado, una reproducción que respeta las proporciones es necesariamente una reproducción a cierta escala.



¿ Qué informa una razón ?

Una razón es una manera de comparar dos magnitudes. En términos generales, una razón informa la comparación por división de dos números o de las medidas de dos cantidades.

Hay razones que comparan partes de un todo. Por ejemplo el número de estudiantes mujeres (6) respecto del número de estudiantes hombres (9) de un curso. Otras razones comparan partes de un todo respecto del todo. Por ejemplo, el número de estudiantes mujeres (6) respecto del total de alumnos del curso (15).

¿ Cómo se escriben y leen razones ?

Hay varias maneras de escribir razones : como una fracción, como una división, o, usando las palabras " es a " o " por cada " entre los valores que se comparan. En cualesquiera de las notaciones anteriores, las razones se leen usando las palabras " es a " o " son a " entre las magnitudes que se comparan.

Por ejemplo, la razón de átomos en una molécula de agua se escribe

2 Hidrógenos
1 Oxígeno

2 Hidrógenos : 1 Oxígeno

2 Hidrógenos " son a " 1 Oxígeno
2 Hidrógenos " por cada " 1 Oxígeno
yselee:

dos Hidrógenos " son a " un Oxígeno

dos Hidrógenos " por cada " un Oxígeno

¿ Qué tipos de razones hay ?

Razones Internas

Comparan cantidades de magnitudes iguales. Definen un número que representa la medida de una de las magnitudes tomando como unidad a la otra. Dado que no salen de un dominio de magnitudes, también se nomina de " medidas locales " a las razones internas.

Por ejemplo si se trata de partidos jugados, la razón 3/5 señala que se ganaron 3 partidos de un total de 5 jugados. En este caso se trabaja con un solo tipo de magnitud, por lo que suele omitirse esta magnitud, en la expresión escrita de la razón.

Razones Externas

Se trata de razones en que se comparan cantidades de magnitudes diferentes. Los distintos valores que puede tomar una razón externa pueden considerarse las medidas de una nueva magnitud. Son ejemplos de razones externas las magnitudes de velocidad y de densidad poblacional, as¡ como las " escalas " en las reproducciones de diseños. La primera expresa la comparación entre una magnitud de espacio recorrido, respecto del tiempo ocupado en ese recorrido. La segunda indica la comparación entre el número de individuos de una población y las unidades de superficie en las que esos individuos habitan.

Por tratarse la razón externa de una comparación que implica distintos tipos de magnitudes, estas magnitudes deben señalarse en la expresión escrita tanto como verbal de la razón. Dicho de otro modo, la razón externa se constituye en un tipo de " medida indirecta " , al considerar más de un dominio de magnitudes.

Cambio de unidades en las razones externas

Las razones externas cambian cuando se cambian las unidades. En efecto, veamos -por medio de un ejemplo- lo que ocurre con la medida " indirecta " de la velocidad en un movimiento uniforme al cambiar las magnitudes de medición.

Un vehículo transita a una velocidad, V de 40 kilómetros por cada hora, es decir

$$V = 40 \text{ [K/H]}$$

¿ A cuántos metros por segundo se desplaza el vehículo ?

1 kilómetro representa 1000 metros
1 hora equivale a 60 minutos

Entonces

$$V = 40 \text{ [1000 m] / [60 min]} = 40 \text{ (1000/60) [m/min]} = 2000/3 \text{ [m/min]} = 666{,}6... \text{ [m/min]}$$

$$V' = 666{,}\ 6... \text{ [m/min]}$$

La medida indirecta de 40 ha cambiado por el valor de 666,6... en tanto cambiaron los dominios de magnitudes.

Razones Constantes

Algunas razones tienen siempre el mismo valor. Expresan relaciones constantes entre las magnitudes que se comparan. Por ejemplo, la razón interna de la longitud de una circunferencia a su radio es. Por su parte, la razón externa de volumen de agua a su masa es l, es decir, la densidad del agua es 1 [em3 / k]. De hecho, muchas leyes científicas pueden interpretarse en matemáticas como razones constantes, a las que suele referírselas por " constantes de proporcionalidad ".

Razones Inversas

Si cambiamos el orden en la comparación de un par de medidas obtenemos una razón inversa a la de origen. En el ejemplo del número de átomos que componen una molécula de agua obtenemos la siguiente razón inversa

1 O
2H

En el caso de los partidos, la razón inversa informa los partidos jugados respecto del total de partidos ganados

5/3

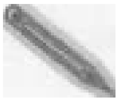
Para distinguirlas, llamamos razones directas a las razones anteriores de 2H /10 y 3/5.

LAS RAZONES PARA NUESTROS ALUMNOS Y ALUMNAS

l. Cada profesor del GPT investiga respecto de sus alumnos y alumnas

- Cuándo usan razones
- Cuáles son las más usadas

2. Cada profesor del GPT consulta a sus colegas de otras disciplinas de su establecimiento qué dificultades tienen cuando deben enseñar temas que implican el uso de razones.



3. En conjunto los miembros del GPT clasifican las razones más usadas por sus alurrinos y alumnas, en contextos de la vida cotidiana y de otras disciplinas, de acuerdo a las categorías de

- Razones internas y externas ;
- Constantes ;
- Directas e inversas.

4. Los profesores del GPT ordenan las razones antes clasificadas según el grado de dificultad que a su juicio pueden presentar para sus alumnos.

5. Los profesores del GPT formulan problemas que tengan sentido para sus alumnos y alumnas y atendiendo a los tipos de razones .encontrados.

SEGUNDA PARTE: COMPARACION DE PAREJAS DE RAZONES. LA NOCION DE PROPORCION

Tal como se compara dos magnitudes,
resultando una razón,
también se puede comparar dos razones,
de donde resulta una proporción.
D'Alambert

¿ Qué es una proporción ?

En una proporción intervienen dos razones. Si ambas razones arrojan un mismo valor entonces esa igualdad se llama proporción. Es decir, una proporción es una igualdad entre dos razones.

¿ Cómo se escriben y leen las proporciones ?

Consideremos las razones 12 m : 4 m y 15 m : 5 m. Ambas son iguales a 3. Entonces en este caso podemos escribir la proporción

$$\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$$

o también

$$12:4=15:5$$

La proporción anterior se lee " 12m es a 4m como 15m es a 5m ". En general, si las razones a : b y c : d forman una proporción se expresa diciendo que " a es a b como c es a d ".

Cabe recordar al respecto que a veces los profesores de matemática presentan discordancias entre su registro escrito y su expresión oral (ver párrafos 23-24 del relato presentado en la primera unidad). En el fondo el alumno estaría recibiendo mensajes contradictorios que podrían confundirlo, obstaculizando su aprendizaje de las proporciones.

Observemos que en una proporción las magnitudes que se comparan en cada razón pueden ser de una misma naturaleza -en el ejemplo anterior la magnitud es longitud- o pueden provenir de dos dominios diferentes, tal como en el siguiente caso, en el que se comparan magnitudes de longitud y de tiempo

$$\frac{40}{1}\ \frac{K}{H} = \frac{120}{3}\ \frac{K}{H}$$

He aquí otra fuente de dificultades para el aprendizaje de las proporciones. Es esperable que el pasar de una trabajo con magnitudes de un mismo dominio a otro con magnitudes de dos dominios, provoque un conflicto cognitivo en el alumno, particularmente si se omiten en forma prematura las unidades que dan sentido a las razones comparadas.

Proporcionalidad

Si un fenómeno puede expresarse por medio de dos magnitudes que varian de modo que tomadas de a pares de razones, forman proporciones que arrojan un mismo valor, el fenómeno constituye una proporcionalidad. Al valor de cada una de las proporciones se le llama constante o coeficiente de proporcionalidad y caracteriza al fenómeno en cuestión.

En el caso de las reproducciones -ampliaciones o reducciones- la " escala de reproducción " es la constante de proporcionalidad del proceso de reproducción. Al indicar en el panel de control de una fotocopiadora esta constante, se está fijando la proporcionalidad deseada para las reproducciones.

Ejemplo

La mamá de Pedro acostumbra a preparar 5 panecillos dulces con 112 kilo de harina, para la once familiar de cada día domingo. El panadero del barrio pidió la receta a la mamá de Pedro para elaborar sus panecillos y ofrecerlos a su clientela. La demanda semanal por los panecillos obedeció a la siguiente tabla

DIA	DEMANDA
Lunes	10
Martes	20
Miércoles	25
Jueves	25
Viernes	30
Sábado	40
Domingo	55

Indiquemos en una tabla los panecillos elaborados y las cantidades de harina usadas por el panadero cada día

TABLA DEL PANADERO

N° DE PANECILLOS	HARINA USADA EN KILOS
10	1
20	2
25	2 1/2
30	3
40	4
55	51/2

¿ Cómo se puede obtener esta tabla ?

Vamos por parte. Para determinar el esquema de pensamiento utilizado por el panadero, veamos la siguiente tabla de comparación

N° DE PANECILLOS	HARINA USADA EN KILOS
Mamá de Pedro: 5	**1/2**
Panadero: 10	X

Para elaborar los 10 panecillos el panadero guardará la razón usada por la mamá de Pedro

5 panecillos : 1/2 kilo harina

Si el panadero dobla la cantidad de panecillos, entonces también deberá doblar la cantidad de harina

10 panecillos : 1 kilo harina

Obsérvese como en este razonamiento se operó primero sobre las cantidades de panecillos (ubicadas en la primera columna), multiplicando su cantidad por 2. Luego se operó sobre la cantidad de harina (es decir, en la segunda columna) la que también se multiplicó por 2. Se ha determinado primero la razón interna entre las cantidades de panecillos : 2. Luego se usó este valor de la razón interna como factor para obtener la cantidad " proporcional " de harina necesaria.

En el texto " Matemáticas de la Vida Cotidiana de Campesinos Chilenos " (Soto, 1992) se describe exhaustivamente un estudio de casos para responder a la pregunta sobre las estrategias y procedimientos de resolución de problemas y de operaciones en situaciones que demandan el uso de la proporcionalidad y sus aplicaciones. Uno de los esquemas desplegados para resolver un problema de proporciones es el que acabamos de mostrar.

En el mencionado estudio, el problema consistió en calcular el peso en kilos de 3 sacos, sabiendo implícitamente que un saco tiene 50 kilos. El esquema desarrollado fue

1 Saco	Multiplicado por 3	resultan	3 sacos
50 Kilos	Multiplicado por 3	resultan	150 K:j

Manuel, campesino entrevistado por la investigadora, establece una razón interna (entre los sacos), luego aplica esta razón como operador sobre los kilos. Se puede observar, entonces, la conservación de las razones internas al pasar de una unidad a otra. Destaca la investigadora como en este caso Manuel no se ciñe al procedimiento habitual de cambio de unidades, que utiliza la razón externa (la nueva unidad es 50 veces más pequeña, y por consiguiente el nuevo peso se expresa con un número 50 veces mayor). En términos de operaciones, el dice " 3 veces 50 " y no " 50 veces 3 " (op. cit. pp 130-131).

Cabe preguntarse si este modo de resolución más apegado al significado de las operaciones puede ser más efectivo para el logro de aprendizajes de alumnos y alumnas de primer año medio, con ocasión de introducirlos al tema de las proporciones.

Por su parte, otro modo de obtener la misma " TABLA DEL PANADERO ", operando con las razones externas, es

N° DE PANECILLOS	OPERACIÓN	HARINA USADA EN KILOS
Mamá de Pedro: 5	Multiplicar por 1/10	1/2
Panadero: 10	Multiplicar por 1/10	X=1

En este caso, en el contexto del cambio de unidades, el " factor unitario " es el patrón establecido por la mamá de Pedro. Ese será el factor que permita el paso de las unidades de cantidad de panecillos a cantidad de kilos de harina que se desea identificar. En ese patrón, la cantidad de harina es la décima parte de la cantidad de panecillos, por lo que la cantidad de harina que se busca corresponde al décimo de la nueva cantidad de panecillos, 10. Considerando las unidades

$$\text{Equis (X) kilos harina} = 10 \text{ panecillos} \times \frac{1/2 \text{ kilo harina}}{5 \text{ panecillos}}$$

Con este ejemplo podemos concluir que hay, al menos, dos modos de resolver la obtención de las distintas proporciones diarias que el panadero necesita para satisfacer la demanda. Así también, los alumnos podrán tener distintas estrategias para resolver en su vida cotidiana ejemplos de esta naturaleza, cuando tienen que resolver problemas de proporcionalidad, sin que este contenido haya sido formalmente tratado en la clase de matemática. Esta indagación nos podría dar pistas para el diseño de secuencias didácticas más cercanas a sus esquemas de abordaje de los problemas que habitualmente enfrentan. En otras palabras, en una perspectiva fenomenológica de partir de los fenómenos cotidianos y de centrarse en la actividad de los alumnos, favorece el ir avanzando en el proceso de abstracción que permite la constitución de objetos mentales sobre los cuales se funden los conceptos matemáticos.

LAS CONSTANTES DE PROPORCIONALIDAD EN EL EJEMPLO

Observemos que se cumple la proporción

5 panecillos : 1/2 kilo harina = 10 panecillos : 1 kilo harina

Se trata en este caso de una igualdad de razones externas dado que aluden a dos magnitudes distintas, cuyo valor, abstrayendo las unidades (cantidad de panecillos y kilos de harina), es de 10.

Veamos otra igualdad de razones externas de la tabla

40 panecillos : 4 kilos harina = 55 panecillos : 5 1/2 kilos harina

Esta vez obtenemos, sin abstraer las unidades, el valor de

$$\frac{10\ [\text{panecillos}]}{1\ [\text{kilo harina}]}.$$

Es una constante de proporcionalidad que caracteriza a la elaboración de panecillos del panadero.

Calculando las respectivas razones inversas se obtiene otra constante de proporcionalidad, tomando el orden de comparación recíproco

1/2 kilo harina : 5 panecillos = 1 kilo harina : 10 panecillos

Contemplando las unidades, la constante o factor de proporcionalidad es

$$\frac{1\ [\text{kilo harina}}{10\ [\text{panecillos}]}$$

Sin contemplar las unidades, obtenemos el valor numérico de 1/10, recíproco al valor numérico de la primera constante de proporcionalidad considerada, 10. Vemos aquí otra vez como es crucial expresar las unidades para no perder el sentido de la operatoria en el trabajo inicial con el tema de las proporciones.

INVESTIGANDO EL APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS Y ALUMNAS

1. En conjunto los miembros del GPT formulan tres problemas (con distintos niveles de dificultad), relacionados con el uso de proporciones. Dichos problemas deben estar lo más cercanos posible a la realidad de los alumnos y alumnas.

2. Cada profesor elige a dos o tres alumnos y/o alumnas, que no hayan abordado aún este tema en clases, y les solicita que los resuelvan.

3. Cada profesor registra las operaciones y expresiones que estos alumnos y/o alumnas usan para explicar como resolvieron los problemas.

4. Cada profesor compara los registros efectuados, tratando de establecer el esquema de resolución utilizado por cada alumno y/o alumna.

5. Cada profesor analiza las semejanzas y diferencias que encuentra al comparar tales esquemas de resolución.

6. En la reunión del GPT, los profesores ponen en común los resultados de esta indagación.

7. Los profesores determinan los desafíos que los resultados de esta indagación presenta para la enseñanza de las proporciones.

ANEXO D

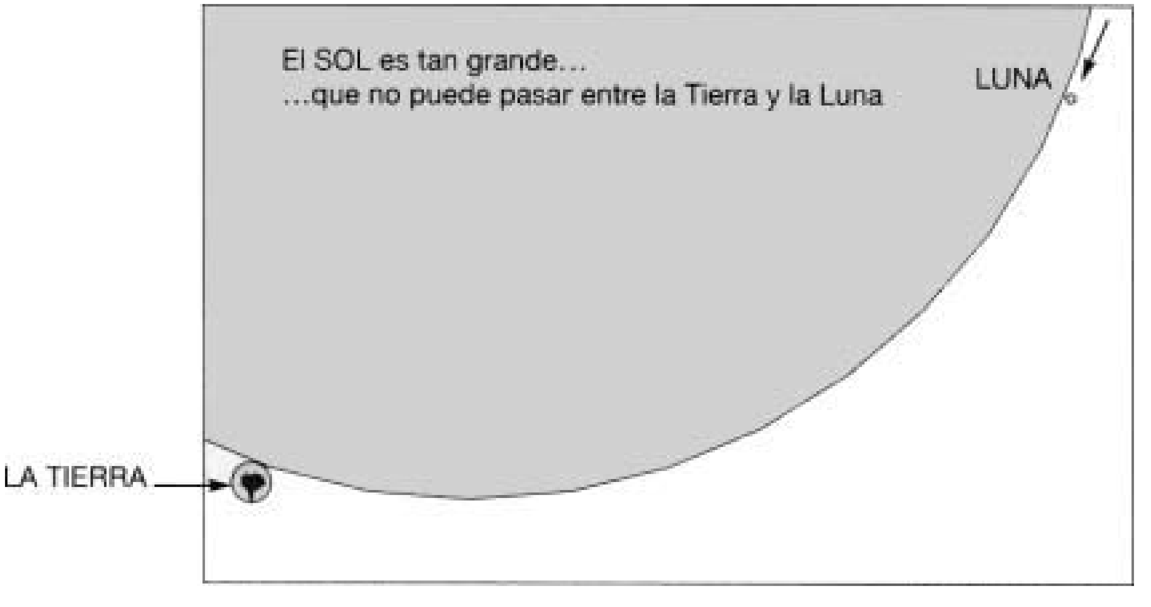
1. ILUSTRACION TOMADA DE ROUCHE (1992) pp. 257-258

El diámetro del Sol es de 1392 000 km.
La distancia Tierra - Sol : 149 597 910 km.
y la distancia Tierra - Luna: 384 400 km.

Si decidimos representar a la Luna (la más pequeña de los tres cuerpos) por un círculo de 1 milímetro de diámetro, entonces se obtienen las dimensiones siguientes para la representación

Diámetro de la Luna: 1 milímetro
Diámetro de la Tierra: 3.67 milímetros
Diámetro del Sol: 400 milímetros
Distancia Tierra -Luna: 110 milímetros
Distancia Tierra - Sol: 43.037 milímetros

Entonces, el Sol debiera estar a 43 metros de la Tierra. Esta nueva escala lo hace más fácil de imaginar.
La siguiente figura grafica esta situación.



2. **Otro ejemplo de proporciones, esta vez extraido del libro "Dios y la ciencia" del filósofo francés contemporaneo, Jean Guitton.**

"...Este ejemplo, va a permitirnos comprender mejor, que el universo está compuesto principalmente de vatio. Imaginemos que tomasemos una llave, como la que usamos para abrir la puerta de nuestra casa y la ampliamos hasta que alcance el tamaño de nuestro planeta Tierra. En esta escala, los átomos que componen nuestra llave gigante, tendrán apenas el tamaño de cerezas."

" Pero he aquí, algo aun más sorprendente. Supongamos que tomamos en la mano uno de estos átomos del tamaño de una cereza. Nosotros podríamos examinarlo muy bien e incluso ayudándonos con un microscopio, no nos sería posible ver el núcleo que aún es demasido pequeño en esa escala. Tendremos entonces, que agrandar nuestra cereza al tamaño de un globo de 200 metros de diámetro. Pese a este tamaño impresionante al que hemos ampliado nuestro átomo, el tamaño del núcleo de nuestro átomo gigante, no sobrepasa el tamaño de un minúsculo grano de polvo. Con este ejemplo, podemos apreciar entonces, el vatio que hay dentro del átomo."

Si elimináramos todas las distancias de vatio que hay entre las distintas partículas que componen el átomo y también las distancias que hay entre los átomos, hasta que todos pudiesen `tocarse', sería posible comprimir todo el universo conocido a su increíble talla original del instante exactamente anterior al Big-Bang. Es decir todo lo que conocemos estaría contenido en una esfera de una pequeñez inimaginable

10-33 centímetros o, lo que es lo mismo,

0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 001 centímetros, lo que representa un tamaño varios billones de veces mas pequeño que el núcleo de un átomo.

RECAPITULACION

El módulo que se desarrolló en las páginas anteriores, respondió a un modelo de análisis inductivo que parte de situaciones concretas relativas al quehacer pedagógico en el aula. Dicho modelo consiste en las siguientes etapas

1. Partir de la realidad. Se registró una sesión de discusión entre profesores de matemáticas, centrada en el análisis de su práctica en la enseñanza de las fracciones, razones y proporciones.

2. Identificar situaciones problemáticas. Del registro efectuado se seleccionó una serie de segmentos que evidenciaban situaciones problemáticas.

3. Analizar cada segmento teniendo presente los siguientes pasos

   a) Objetivación. Se describe el marco en que se da la situación problemática presente en el segmento.

   b) Nominación. Se identifica el problema poniéndole un título que permita delimitarlo y focalizar el análisis.

   c) Análisis del problema. Se busca interpretar el problema mediante la formulación de hipótesis interpretativas, relativas a las ideas y representaciones que sustentan los profesores al discutir esta situación.

   d) Proyección didáctica. Se buscan alternativas de acción pedagógica que apunten a la resolución del problema relevado.

4. Complementar teóricamente. Se refirió el conjunto de problemas analizados a un marco de referencia teórica que suministrara algunos elementos que permitiesen ampliar la comprensión en torno a ellos, tenien do siempre como trasfondo el quehacer en el aula. En esta perspectiva, las unidades desarrolladas no pretendieron agotar cada uno de los temas tratados, sino que abrir miradas en torno a la significación de fracciones, razones y proporciones desde el punto de vista de la didáctica.

5. Proyectar didácticamente. Se motivó, mediante las actividades, que los profesores constantemente tuvieran como desafío el aterrizar la reflexión a su quehacer didáctico cotidiano.

Entre los principios que inspiraron la adopción de este modelo están, por un lado, el enorme caudal de experiencias que poseen los profesores y que, con las herramientas necesarias, dicho caudal se puede explicitar conceptualmente y, por otro, que la reflexión crítica en torno a la práctica y el subsecuente aprendizaje que de ella se deriva, se ve facilitada y enriquecida mediante la interacción con los pares.

Sin lugar a dudas, la implementación de este módulo en el GPT permitirá poner en práctica el modelo en el cual se sustenta, el cual es una herramienta viable de ser utilizada para la problematización de la enseñanza de otras temáticas.

Respecto de los contenidos abordados, se constituyó la fracción como megaconcepto con el fin de contrarrestar la tendencia a la mecanización operatoria carente de significado en el cual se tiende a caer. Analizar la complejidad de este megaconcepto, en sus distintas dimensiones, facetas y manipulaciones, debe permitir aclarar algunos errores conceptuales y operatorios, conocer los diversos objetos mentales que organiza y situarse en los desafíos que implica un aprendizaje significativo de él por parte de los alumnos y alumnas.

Las facetas de la fracción se abordaron en sus dimensiones dinámica y estática. Esto es relevante porque en muchos conceptos matemáticos es posible distinguir las dimensiones de procesos y producto, lo cual contribuye a comprenderlos más profundamente y a buscar estrategias didácticas para enseñarlos con sentido. Además, estas dimensiones se asociaron con presentaciones para la enseñanza, en particular se ilustraron con registros gráficos, numéricos y verbales, cuya distinción evita caer en contradicción al momento de enseñar, a la vez que comprender fuentes de obstáculos para su aprendizaje. En definitiva, se busca superar el desafío de que frente a la complejidad del concepto de fracción, se cuente con una sola notación para expresar la diversidad de las facetas que contempla.

Se culmina el tratamiento del megaconcepto de fracción, presentando manipulaciones de magnitudes fraccionadas con algunas ilustraciones en los contextos kinestésico, oral y simbólico en un orden creciente de dificultad operatoria. De ese modo se pretendió ilustrar una lógica en la cual asentar una secuencia didáctica dirigida a superar los errores más comunes en la operatoria.

En la unidad de razón y proporción el hilo conductor continúa siendo responder a las situaciones problemáticas relevadas en la primera unidad. El concepto de razón se abordó presentando lo que él informa, su modo de lectura y de escritura, y los siguientes tipos de razones : internas, externas, constantes e inversas. Eso se hizo para favorecer su comprensión en las dimensiones tanto cualitativa como extensiva.

Para el concepto de proporción se señala su definición, así como la forma en que se escriben y leen, y se desarrolla la noción derivada de proporcionalidad. Luego se ilustra con dos situaciones en las que se opera estrechamente apegado al significado de las operaciones. Esto último permite abrir miradas sobre alternativas a los modos más usuales de enseñar, entre otros aspectos, la conversión de unidades que fue uno de los problemas resaltados en el relato.

BIBLIOGRAFÍA

FIOL, MA. Y FORTUNY, *J. (1990) : " Proporcionalidad ".* Colección MATEMATICAS : CULTURA Y APRENDIZAJE. Editorial Síntesis, Madrid, España.

LLINARES, S. Y SÁNCHEZ, MA. *(1988) : " Fracciones. La relación parte-todo ".* Colección MATEMATICAS : CULTURA Y APRENDIZAJE. Editorial Síntesis, Madrid, España.

ROUCHE, N. *(1992) : " Le sens de la mesure: des grandeurs aux nombres rationels ".* Editorial Didier Hatier, Bruselas.

ROUCHE, N. (junio, *1996) : " Pourquoi ont-ils inventé les fractions ".* Edición provisoria, Nivelles, Bélgica.

SEGURA, D. Y ROMERO, *J,* (febrero *1992) : " Las Matemáticas en el Aula Posibilidades de construcción significativa ".* Artículo en la Revista "Planteamientos en Educación", pp. *6 - 24. Vol.* 1, N°3. Editores Corporación Escuela Pedagógica Experimental, Santa Fé de Bogotá, Colombia.

SOTO, I. *(1992) : " Mathématiques dans la vie quotidienne de paysans chiliens ".* Tesis de doctorado, Université Catholique de Louvain, Facultad de Psicología y de Ciencias de la Educación, Louvain-la-Neuve.