Trabajo de Ewaldo Hott y Pablo Gutierrez 4º Medio Matematico 2004

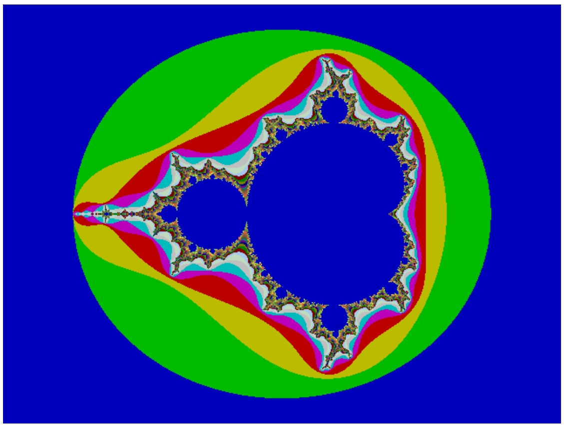
INTRODUCCION AL MUNDO FRACTAL : Matematica

POR

PABLO GUTIERREZ

Y

EWALDO HOTT



INTRODUCCIÓN

Fractal:

1-Se dice de los objetos cuya creación depende de reglas de irregularidad o de fragmentación y del proceso matemático que los estudia.

2-Objeto matemático de dimensión no entera.

Esta seria la definición que nos daría un diccionario del tema que vamos a tratar durante los próximos minutos; pero nosotros, que no somos demasiado matemáticos, podemos usar otra definición que se acerque más a nuestros conocimientos como:

Fractal: Imagen harto complicada que responde a una formula mas complicada aun con varias propiedades características como la dimensión fraccionaria y la autosemejanza o simetría de escala.

Seguramente al finalizar este trabajo podamos ofrecer una definición más correcta de lo que es un Fractal y no como esta que puede calificarse como una definición para "andar por casa".

Lo que pretendemos con esto es conocer lo que es un fractal y profundizar de un modo matemático en una disciplina casi totalmente extraña para los miembros de este grupo, que no somos ninguno alumnos de ciencias.

Y dejándonos de explicaciones previas pasamos directamente al trabajo...

Fractal

Fractal, en matemáticas, figura geométrica con una estructura compleja y pormenorizada a cualquier escala. Normalmente los fractales son *autosemejantes*, es decir, tienen la propiedad de que una pequeña sección de un fractal puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el fractal. Un ejemplo de fractal es el "copo de nieve", curva que se obtiene tomando un triángulo equilátero y colocando sucesivos triángulos, cada vez de menor tamaño, en el tercio medio de los lados cada vez más pequeños. En teoría, el resultado es una figura de superficie *finita* pero con un perímetro de longitud *infinita*, y con un número infinito de vértices. En el lenguaje matemático del cálculo, dicha curva no se puede diferenciar. Se pueden construir muchas de estas figuras repetitivas aunque desde su aparición en el siglo XIX se habían considerado como un concepto extravagante.

Un cambio decisivo en el estudio de los fractales ocurrió con el descubrimiento de la geometría fractal por el matemático francés de origen polaco Benoit B. Mandelbrot en la década de los setenta. Mandelbrot utilizó una definición de dimensión mucho más abstracta que la usada en la geometría euclídea, afirmando que la dimensión de un fractal se debe usar como un exponente al medir su tamaño. El resultado es que no se puede considerar estrictamente que los fractales existen en una, dos o un número entero de dimensiones,

sino que se han de manejar matemáticamente como si tuvieran dimensión *fraccionaria*. La curva del "copo de nieve" tiene una dimensión fractal de 1,2618.

La geometría fractal no es solamente una idea abstracta. Un litoral, considerado desde el punto de vista de su irregularidad más pequeña, tendería hacia una longitud infinita, lo mismo que ocurre con el "copo de nieve". Mandelbrot sugirió que las montañas, nubes, rocas de agregación, galaxias y otros fenómenos naturales son similares a los fractales, por lo que la aplicación de la geometría fractal a las ciencias es un campo que está creciendo rápidamente. Además, la belleza estética de los fractales los ha convertido en elemento fundamental de los gráficos por ordenador o computadora.

Los fractales también se usan en ordenadores para reducir el tamaño de fotografías e imágenes de vídeo. En 1987, el matemático inglés Michael F. Barnsley descubrió la *transformación fractal*, capaz de detectar fractales en fotografías digitalizadas. Este descubrimiento engendró la compresión fractal de imágenes, utilizada en multimedia y otras aplicaciones basadas en la imagen.

Benoît B. Mandelbrot

Benoît B. Mandelbrot es el fundador de una nueva rama de las matemáticas, la geometría fractal. En la geometría convencional, la dimensión de un objeto tiene un valor entero; por ejemplo, una línea tiene una dimensión y un plano tiene dos. En la geometría fractal, los objetos pueden tener dimensiones fraccionarias; por ejemplo, una imagen fractal como la del conjunto de Mandelbrot tiene un borde infinitamente detallado, y su dimensión está entre uno y dos.

Breve Reseña Histórica

Los fractales fueron concebidos aproximadamente en 1890 por el francés Henri Poincaré. Sus ideas fueron extendidas más tarde fundamentalmente por dos matemáticos también franceses, Gastón Julia y Pierre Fatou, hacia 1918. Se trabajó mucho en este campo durante varios años, pero el estudio quedó congelado en los años '20.

El estudio fue renovado a partir de 1974 en IBM y fue fuertemente impulsado por el desarrollo de la computadora digital. El Dr. Mandelbrot, de la Universidad de Yale, con sus experimentos de computadora, es considerado como el padre de la geometría fractal. En honor a él, uno de los conjuntos que él investigó fue nombrado en su nombre.

Otros matemáticos, como Douady, Hubbard y Sullivan trabajaron también en esta área explorando más las matemáticas que sus aplicaciones.

Desde la década del '70 este campo ha estado en la vanguardia de los matemáticos contemporáneos. Investigadores como el Dr. Robert L. Devaney, de la Universidad de

Boston ha estado explorando esta rama de la matemática con la ayuda de las computadoras modernas.

Diferencias fundamentales entre la Geometría Euclídea y la Fractal

Euclídea	Fractal
Tradicional (más de 2000 años)	Moderna (aprox. 10 años)
Dimensión entera	Dimensión fractal
Trata objetos hechos por el hombre	Apropiada para formas naturales
Descripta por fórmulas	Algoritmo recursivo (iteración)

FRACTALES Y CAOS

Según B. Mandelbrot se considera fractal a aquel objeto o estructura que consta de fragmentos con orientación y tamaño variable pero de aspecto similar. Esta característica confiere al fractal algunas propiedades geométricas especiales en cuanto a su longitud y a la relación existente entre el área de su superficie y su volumen. Estas propiedades especiales hacen que se requieran otras herramientas matemáticas diferentes s las comunes para poder explicar sus características. En el cuerpo humano existen estructuras con geometría fractal, como son la red vascular, las ramificaciones bronquiales, la red neuronal, la disposición de las glándulas, etc.
La importancia que tiene esta geometría fractal en el organismo es que permite optimizar la función de los sistemas debido a que en el mínimo espacio tienen la máxima superficie.
Al existir estructuras con geometría fractal deducimos que deben ser posibles los fenómenos con características fractales al poder poseer estos fenómenos unos patrones que se repiten constantemente en diferentes escalas de tiempo. Estos fenómenos los podemos caracterizar con el uso de herramientas matemáticas de la geometría fractal.

Según dijo H. P. Koch, la teoría fractal puede ser considerada como una herramienta válida y útil para el estudio de fenómenos dinámicos en el cuerpo humano o en la naturaleza y nos permite una aproximación más acorde con la complejidad y la ausencia de linealidad existente en dichos procesos.
La dimensión fractal es un índice matemático que podemos calcular y que nos permite cuantificar las características de los objetos o fenómenos fractales.
La concepción de dimensión que nosotros usamos normalmente es la euclidiana clásica, es la que una dimensión es una recta, dos dimensiones forman un plano y tres dimensiones forman un objeto con volumen.

En cuanto a la relación existente entre los fractales y el caos, nosotros, profanos en la materia podríamos decir sin equivocarnos demasiado que los fractales son la representación grafica del caos.
Profundizando un poco en la materia y basandonos en las ideas de Carlos Sabino podriamos decir que la relacion existente entre el caos y los fractales se debe a que los fractales son figuras geométricas con un cierto patrón que se repite infinitamente y a múltiples escalas y si uno las observa detenidamente descubre que ese patrón se encuentra en los componentes, y en las partes de sus componentes, y en las partes componentes de sus componentes, y así hasta el infinito. Esto lo podemos constatar si podemos observar el fractal a diversas escalas cada vez más pequeñas.

Los fractales de los que se dice que no tienen dimensión entera (como 2,37 o 2,84) representan la forma grafica en que pueden resolverse las ecuaciones caóticas. Serian, pasándonos al campo de la literatura, el equivalente a una metáfora de las parábolas de las ecuaciones tradicionales. Los fractales nos muestran en que puntos de un espacio matemático determinado caerían las soluciones de nuestra ecuación caótica.

La parte más curiosa de este tema es que tanto sus ecuaciones como los fractales se pueden construir con elementos que todos hemos visto en nuestro pasado colegial, pero los resultados que se obtienen pueden llegar a ser de una complejidad increíblemente elevada.
Así puede considerarse, de algún modo, la vida...

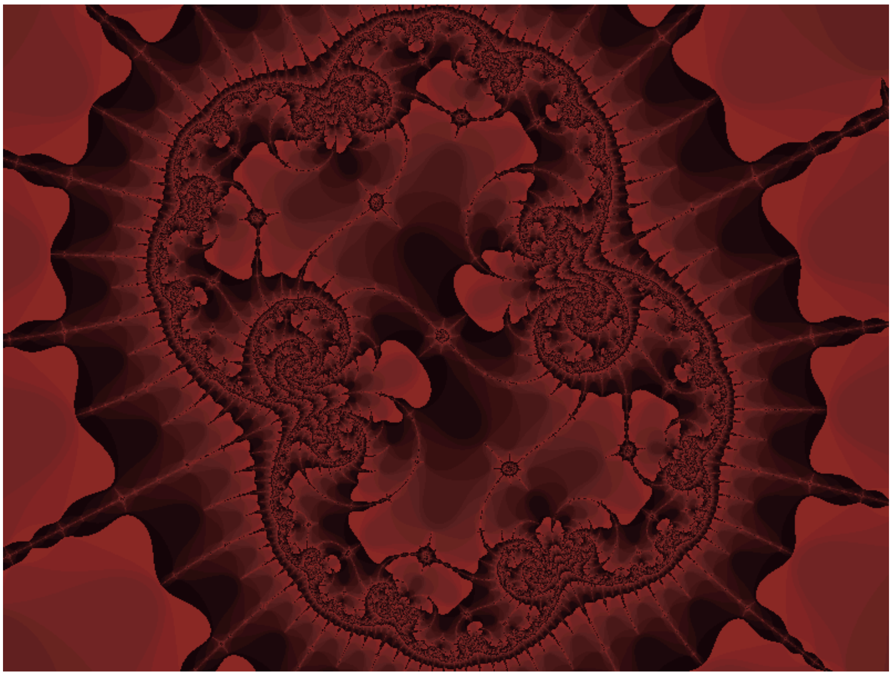
CARACTERÍSTICAS DE LOS FRACTALES

A grandes rasgos podríamos definir un fractal como una figura geométrica con una estructura muy compleja y pormenorizada a cualquier escala. Ya en el siglo XIX se diseñaron muchas figuras con estas características pero no eran consideradas más allá de simples curiosidades y rarezas matemáticas. Sin embargo, en la década de los setenta del siglo pasado, su estudio se desarrollo íntimamente ligado con los estudios sobre el caos.
Como ya hemos señalado anteriormente, los fractales son básicamente la representación gráfica del caos, pero, además tienen una serie de características propias que a continuación vamos a tratar de enumerar.
En primer lugar, debemos considerar que los fractales no dejan de ser figuras geométricas, aunque no se ajusten y sea imposible su definición por medio de los conceptos y métodos clásicos vigentes desde Euclides. Sin embargo, la anterior afirmación está muy lejos de convertirlos en figuras raras o anómalas, ya que con un simple vistazo a nuestro alrededor podemos percibir la inexistencia de formas euclídeas perfectas, sensación que se acentuará en gran medida si nos encontramos en plena naturaleza. De hecho, nos sorprendemos muchísimo cuando tropezamos, por ejemplo, con una piedra de apariencia esférica. En consecuencia, aunque siempre intentemos aplicarlas a la realidad, las formas euclídeas (circunferencias, cuadrados, cubos...) se limitan al campo de nuestra mente y la más pura abstracción matemática. Por el contrario, como veremos más adelante, los fractales se manifiestan por doquier.
Al igual que cuando hablamos del caos, una de las propiedades más significativas de los fractales y que resulta especialmente llamativa es el hecho de que se originan a partir de unas situaciones iniciales o reglas muy básicas, que darán lugar a figuras extremadamente complejas, aparentemente diabólicas.
Otra característica esencial del concepto de fractal es la autosemejanza.Sin embargo, los avances de este siglo que desvelaron cierto parecido de un átomo con sus electrones girando en torno al núcleo y el Sistema Solar con el Sol y sus planetas, rehabilitaron en cierta medida este concepto. En el caso más concreto de los fractales, se aprecia como un objeto fractal cada vez que cambiamos la escala, revela un claro parecido con la imagen anterior. Por lo tanto, podemos definir la autosemejanza como simetría dentro de una escala, es decir, los fractales son recurrentes.
Esto resulta evidente en figuras como la curva de Koch, en la que cada ampliación resulta en una copia exacta de la imagen anterior. Pero para ilustrarlo de una forma general, podemos observar la línea de la costa del continente europeo. En principio, podemos considerar Europa como una península de Asia Además, dentro de Europa hay grandes penínsulas como la Balcánica y si reducimos la escala, descubrimos otras pequeñas como la península del Peloponeso y así podemos seguir hasta diferenciar entre los entrantes y salientes entre los granos de arena de la playa.
Sin embargo, esta autosemejanza no debe confundirse con una absoluta identidad entre escalas, es decir, siguiendo con el ejemplo interior, no se trata de que las penínsulas más

pequeñas tengan una forma exactamente igual a las mayores. Más bien lo que lleva implícita esta idea es la existencia de una complejidad infinita en las figuras fractales puesto que, dada su recurrencia, podremos ir ampliando su imagen una y otra vez hasta el infinito sin que aparezca una forma totalmente definida. De hecho, estas ampliaciones irán revelando un entramado cada vez más complicado y aparentemente inexplicable.

Pero este descubrimiento nos guía hacia una pregunta más difícil, ¿cuál es el tamaño de un fractal? Esta misma pregunta se hacía Mandelbrot en su artículo *How long is the coast of Britain?* en el que plantea el concepto de dimensión fractal. De acuerdo con la geometría de Euclides, nos movemos en un espacio de tres dimensiones, ya que para situar un punto en el plano necesitamos tres coordenadas (altura, anchura y fondo). De igual manera, un plano tendrá dos dimensiones, la recta, una y el punto, cero. Sin embargo, si tomamos, por ejemplo, la curva de Koch que se supone que pertenece a un mundo unidimensional, veremos como su longitud varía dependiendo de la *regla de medir* que utilicemos y, por lo tanto, resulta imposible calcularla de forma exacta. Evidentemente, tampoco se trata de un plano pues como su propio nombre indica es una curva ya que está dentro del plano. En consecuencia, se considera que su dimensión debe encontrarse a medio camino entre uno y dos.

Este planteamiento puede parecer un simple malabarismo matemático, ya que esta dependencia del tamaño de la unidad de medida y, en definitiva, de la relatividad sobre el punto de referencia del observador se escapa entre las manos. Sin embargo, resulta muy útil, ya que como mostraremos en el siguiente apartado puede calcularse y, por lo tanto, nos sirve para ponderar cualidades de los objetos fractales como su grado de escabrosidad, discontinuidad o irregularidad. Esto además implica que se considere que este grado de irregularidad sea constante a diferentes escalas, lo que se ha demostrado en numerosas ocasiones apareciendo una increíble irregularidad regular y pautas de comportamiento dentro del más completo desorden.



Trabajo de Ewaldo Hott y Pablo Gutierrez 4º Medio Matematico 2004

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO FRACTAL

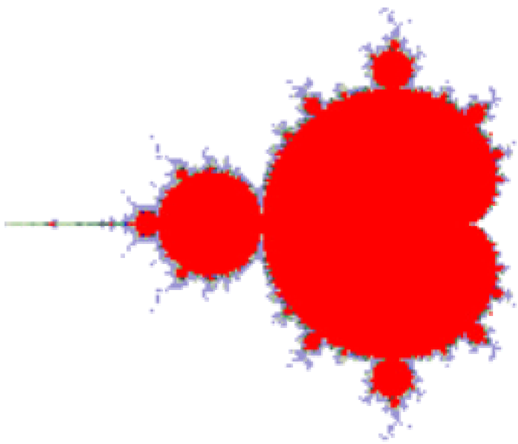
¿Fractales?

(partimos de la base que es un tema nuevo para UD y para nuestros compañeros)

De seguro que usted , don Ricardo y compañeros en general , no conocen la gran variedad de aplicaciones que tienen los fractales . Nuestro trabajo de búsqueda y recopilación de información, en la cual participamos Pablo Gutierrez y Ewaldo Hott , será con el propósito de mostrarles la genialidad de tales cuerpos "especialmente"geométricos. Y vaya que sí lo son. No así, a los matemáticos de hoy en día y a la gente común como podría se rlo ustedes o yo, le llama la atención la peculiar belleza de entes matemáticos de este estilo.

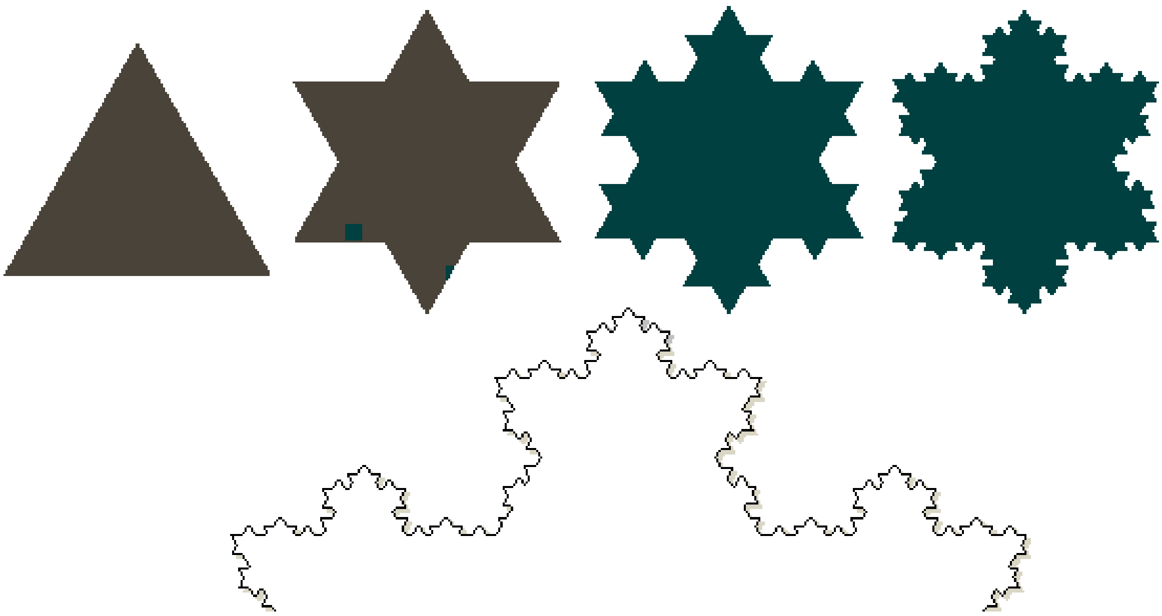
Pero bueno... ¿qué es un fractal? En pocas palabras, belleza... Claro, le entiendo. Esta definición deja mucho que desear, especialmente si ustedes son algún profesional o simplemente una persona exigente que gusta de buenas definiciones. Entonces, considerando cualquiera de estos dos casos, definiremos un cuerpo fractal como un ente geométrico "distinto". En realidad, como un ente geométrico "infinito". (y si son ustedes más exigente aún, la definición correcta es: "un cuerpo fractal es aquel que tiene la Dimensión Topológica estrictamente menor que su Dimensión de Haussdorf-Besucovic").

Existen dos características propias a los fractales. Ellas son importantes para comprender su estructura y su concepción. Primero, su Área o Superficie es finita, es decir, tiene límites. Por el contrario y por paradíjico que esto resulte, su Perímetro o Longitud es infinita, es decir, no tiene límites. Un fractal puede ser una serie de circunferencias que se coloquen una sobre el radio de la otra como si fuera su diámetro y así infinitamente. El area sería siempre semejante o aproximada a la de la circunferencia mayor, pero su longitud (considerandolas no como figuras independientes, sino como todas una sola), sería infinita... bueno... creo que esto no es muy claro, cierto? Entonces vean ustedes su primer fractal:



Este es el conjunto de Mandelbrot . Su nombre deriva de su descubridor y el además considerado padre de la Geometría Fractal, el matemático polaco BENOIT MANDELBROT. Pero no todos los méritos en el descubrimiento de los Fractales le son debidos a él, sino que también a otro gran matemático, como fue el radicado frances GASTON MAURICE JULIA. Estos dos matemáticos han sido los que más han aportado en el mundo de las investigaciones sobre fractales. Sus historias son muy peculiares y, en cierto modo, ninguno de ellos quizo descubrir los fractales... digamoslo en forma retórica que... los fractales son una hermosa casualidad.

Ahora bien. Introduscamos un nuevo concepto que no ha de serle ajeno al estudiante de fractales: ITERACIÓN. Una iteración es la repetición de "algo" una cantidad "infinita" de veces. Entonces, los fractales se generan a través de iteraciones de un patrón geométrico establecido como fijo. El mejor y más claro ejemplo que usted puede observar de este tipo de concepto es el siguiente:



En la imagen, la figura representada es conocida como el Copo de Nieve de Koch o la Isla Triáda de Koch y se forma a partir de un triángulo equilátero al cual se dividen sus lados en tres partes iguales, de forma tal que en los tercios medios se coloca otro triángulo semejante al primero. Esta iteración, en un alto grado de complejidad, se asemejará a una circunferencia, ya que los triángulos se irán colocando infinitamente. Esto reafirma el concepto de Area finita y Perímetro infinito. Claro está que los fractales son también números (en efecto, la iteración de un número Complejo simple, por lo que pueden traducirse en operaciones matemáticas).

Complejidad Infinita???

La generación propiamente tal de un fractal se puede hacer de muchas maneras, pero matemáticamente, se define como la repetición constante de un cálculo simple (ITERACIÓN), como habíamos dicho anteriormente.

El Conjunto de Mandelbrot es mucho más complejo que la imagen vista anteriormente. Pero su generación es lo interesante.
El Conjunto de Mandelbrot se forma mediante un NUMERO COMPLEJO **(a+bi, A y B nros. Reales; i=unidad imaginaria) que se dice "especial". Entonces, tenemos el número complejo Z = a+bi, al cual se lo somete a una "prueba matemática". Para ello tomamos el número Z y lo elevamos al cuadrado, sumándoselo después al mismo Z. Luego, elevamos ese resultado y lo elevamos nuevamente al cuadrado, sumándoselo a Z y así infinitamente (iteración). Representemos esto:**

NÚMERO $\mathbb{C} = a + bi$ (complejo).	
primera iteración	$Z^2 + Z$
segunda iteración	$(Z^2 + Z)^2 + Z$
tercera iteración	$((Z^2 + Z)^2 + Z)^2 + Z$

El esquema anterior nos muestra el caso mencionado. Se toma un número complejo y se le somete a un proceso matemático "simple", tal como es elevarlo al cuadrádo y sumarlo consigo mismo. Este proceso, iterado, transforma ese número complejo "simple" en uno infinitamente intrincado. Aún así, si ustedes no comprenden estos cálculos, no se preocupen , ya que por su complejidad el Conjunto de Mandelbrot, por ejemplo, ha sido generado a través de computadoras, en este caso de la IBM.

Fractales, Computación y Aplicaciones

Los fractales, como ya sabemos, son números Complejos infinitamente extensos (por no decir complejos, aunque suene extraño). Entonces... ¿cómo se explica la generación de imágenes tan hermosas como el Conjunto de Mandelbrot? ¿Usted qué cree? (la respuesta se ha dado ya en el término del párrafo anterior).

Las imágenes fractales son generadas utilizando computadores, ya que estos pueden realizar cálculos tan complejos como el estudiado, pero cabe tener en cuenta que lo representado no es propiamente un fractal, ya que por poderosa que sea la máquina, un fractal es infinito y una computadora no puede realizar un cálculo infinitas veces. En el caso del Conjunto de Mandelbrot, este se realiza en un plano bidimensional de números Complejos. Todos los números que al ser iterados se mantienen "realtivamente pequeños" se dice que pertenecen al Conjunto de Mandelbrot. Estos números son representados por la computadora con color negro. Los demás puntos, es decir, los que no pertenecen al

Conjunto de Mandelbrot, se representan dependiendo de su rapidez de iteración, esto es, el menos rápido se representa con amarillo, anaranjado, etc., y el más rápido, en colores celeste, azul, azul oscuro y así. En este caso, el mejor de los colores es el negro.

En el caso de las aplicaciones de los fractales, se cuenta, dentro del campo computacional, el proceso de TRANSFORMACIÓN FRACTAL, el que se realiza con imágenes que contienen muchos pixels. Cada uno de estos se va "agrandando", por así decirlo, "infinitamente", sin dejar de ser el mismo (en el sentido de patrón geométrico, ya que un pixel es de forma cuadrada), lo que permite que, en terminos de memoria, el espacio ocupado sea menor. Además, como podran ver más adelante, se utilizan para generar efectos en programación y otras cosas tan inusuales , como la Música Fractal.

Otra aplicación se da en el campo de la Geología y Topología. Considerando un litoral cualquiera, con todas sus estrivaciones, se dice que tiende a una longitud infinita, siendo su area finita (características propias de un fractal). Además, Mandelbrot propuso que galaxias y otros cuerpos semejantes se regían por el mismo concepto.

El genial Mandelbrot, en su libro "La Geometría Fractal de la Naturaleza", señala parafraseando:"¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo frío y árido? Sí, es incapaz de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o árbol, porque ni las nubes son esféricas ni las montañas cónicas o un árbol cilíndrico". Es pues, un hombre sabio, ya que adelante nos muestra como la matemática es parte de nuestras vidas, sino una misma de ellas. La geometría fractal permite explicar diversos fenómemos naturales y su buen entendimiento y comprención son factores que hoy en día se aprecian mucho en el hombre finisecular.

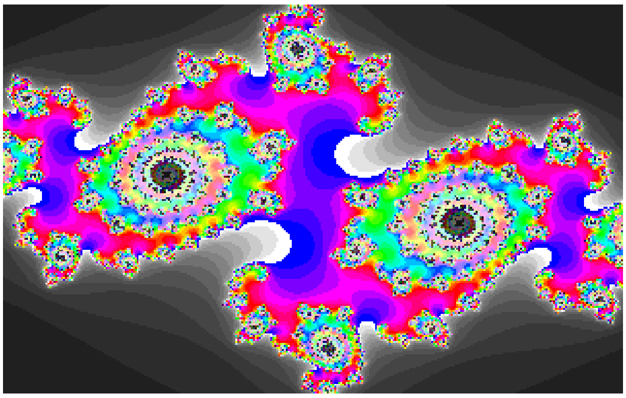
PROFUNDIZANDO EL CONCEPTO FRACTAL

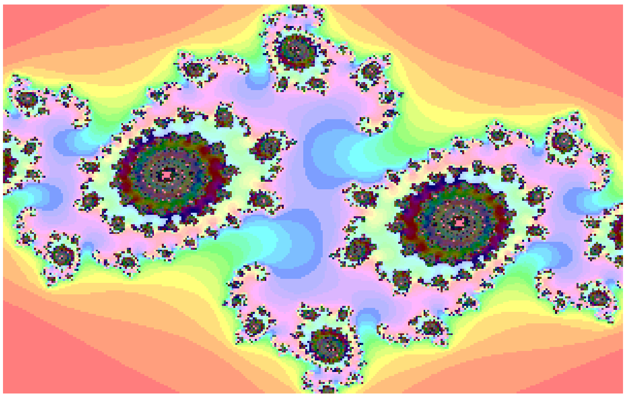
En su búsqueda por una definición adecuada, Mandelbrot señala un punto importante dentro del concepto de Fractal. Un cuerpo de este estilo debía contar con una "dimensión", pero no como se puede pensar a primera vista, sino que una dimensión numérica. Se reconoce que los fractales poseen una dimensión fraccionaria, lo que los hace más singulares aún. No puedo decir mucho sobre este tema, pero mi conocimiento me permite contarle sobre la existencia de dos dimensiones que son propias a todo cuerpo geométrico. En realidad, es una sóla, la llamada DIMENSION TOPOLÓGICA. Dentro del concepto, además, Mandelbrot definió una llamada DIMENSIÓN FRACTAL. la dimensión topológica debe ser menor que la dimensión fractal. Mandelbrot adoptó el término "dimensión fractal" para reemplazar lo que se conoce como la DIMENSIÓN DE HAUSDORFF-BESICOVITCH, dos grandes matemáticos que introdujeron el concepto. Pero lo importante realmente es que en topología, todos los cuerpos, incluyendo a los llamados "cuerpos euclídeos" (rectas, segmentos, etc.) poseen una Dt (dimensión topológica) igual que su dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Esto es Dt=D. Para los fractales, el caso es contrario: Dt menor que D.

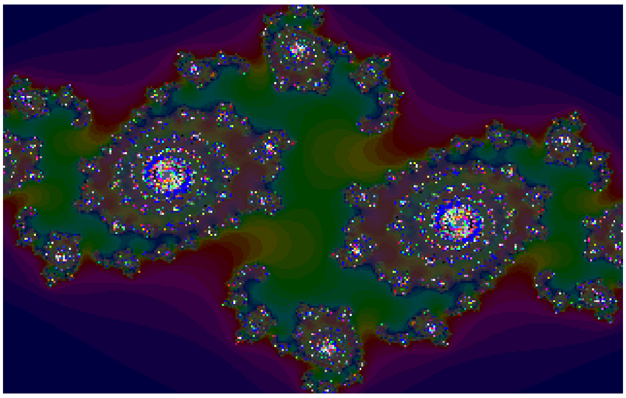
Dt=D (en fractales Dt<D)

Diversos programas de generación fractal pueden permitir un estudio mucho más a fondo y más complementado de este tema. Incluso, podemos decir que como la representación de los números Complejos en la computadora toman distintos colores, se puede conseguir una variación espectacular con el cambio a los colores opuestos. Si no entiende esto, es mejor que vea la siguiente secuencia de fotografías. El efecto no se nota para nada y no podría ni siquiera asemejársele al verlo en directo.

Trabajo de Ewaldo Hott y Pablo Gutierrez 4º Medio Matematico 2004







Note usted que la imagen es la misma, pero con distintos colores. Este fractal es conocido como "Dragon Fractal" o nombres similares. Se deriva del conjunto de Mandelbrot. Aunque, el efecto no se aprecia para nada bien, Se aconsejo totalmente que baje el programa FRACTINT. No pesa absolutamente nada y es el mejor que he conocido (hasta el momento, seguirán llegando más). Un programa para Disfrutar de sus propios fractales.

La Dimensión Topológica de los fractales tiene mucha importancia especialmente con Koch. Tanto como el triángulo de Koch, existen otras curvas, los llamados Terágonos de Koch que se forman por 2 "arcos", uno junto al otro. Imaginen como puede ser el terágono de Koch, una figura infinitamente compleja...

DIMENSION FRACTAL*(1)*

UN PRIMER ACERCAMIENTO A LA DIMENSIÓN FRACTAL.-

Ahora que hemos profundizado más el tema Fractal, es momento de que demos un paso más hacia las puertas del conocimiento. Para ello, introduciremos un nuevo concepto que nos será de utilidad a lo largo de todo el desarrollo de este trabajo, el concepto de Dimensión Fractal.

Bueno, si ponemos como ejemplo el problema de medir la longitud exacta de la costa (GRAN BRETAÑA) presenta principalmente algunas complicaciones. Una de ellas, es que si nos acercamos cada vez más (hacemos un "zoom") a la costa, veremos que la longitud "aparente" que habíamos medido en un comienzo, en realidad no es sino una "aproximación" a lo que en realidad es. Algo muy similar a lo que hemos definido como Fractal.

Por ejemplo, imaginemos que una porción de esa costa era "recta". Supongamos también que la medimos con una regla de medir de las que uno utiliza comúnmente y que nos arrojó una medición "exacta" de 1 metro. El problema de esta medición surge ya que si nos acercamos un poco más de la distancia a la que originalmente hicimos la medición, quizá descubriremos (y de hecho así lo haremos) que esa linea recta no era tan recta, sino que estaba constituida de pequeños granitos de arena todos desordenados respecto a neustra rectitud. De esa forma, ya no nos será tan fácil volver a medir, pero descubriremos que cada vez que intentamos medir nuevamente la longitud, y nos acercamos al objeto en cuestión, su longitud resultará ser cada vez mayor de lo que era aparentemente.

Esto ocurre por dos razones: primero, porque la medida depende de la sensibilidad del instrumento que ocupemos -es decir, cuán exacto este sea- para hacerla. Y segundo, porque estamos intentando medir un cuerpo con dimensiones euclidianas, siendo que realmente se trata de cuerpos con "dimensión fractal".

Recordemos que cuando medimos algo solamente comparamos con otra cosa. Y estos "algos" y "cosas" no son más que dimensiones o unidades (que no son lo mismo, por lo demás). Si intentamos medir longitudes, como el caso de la costa de bretaña, lo estaremos haciendo en una dimensión (longitud) y estaremos utilizando conceptos de dimensión euclidiana (es decir, las dimensiones a las que estamos acostumbrados normalmente, una dimension, dos dimensiones, tres dimensiones). Y como sabemos, esta medida no puede ser nunca euclidiana, porque cada vez que nos acerquemos tenderá a infinito. Por lo mismo, deducimos que no puede ser un cuerpo unidimensional. Pero tampoco se trata de un cuerpo de dos dimensiones, porque no deja de ser una línea y si lo vemos de un punto de vista matemático no cubre el plano completo. En fin, el caso es que no nos encontramos frente a una línea unidimensional del tipo clásico euclideano, sino que nos encontramos frente a una línea del tipo clásico "fractal". Es por esta razón que cuando tratamos el Triángulo de Sierprinsky, dijimos que tenía "superficie finita" y "longitud infinita". De hecho, el primer caso podemos justificarlo simplemente, ya que cualquier fractal "lo vemos", es decir, no escapa de nuestra vista infinitamente, pero, como demostramos recién, su longitud tiende a ser infinita. Sin duda, otra de las maravillas del mundo matemático.

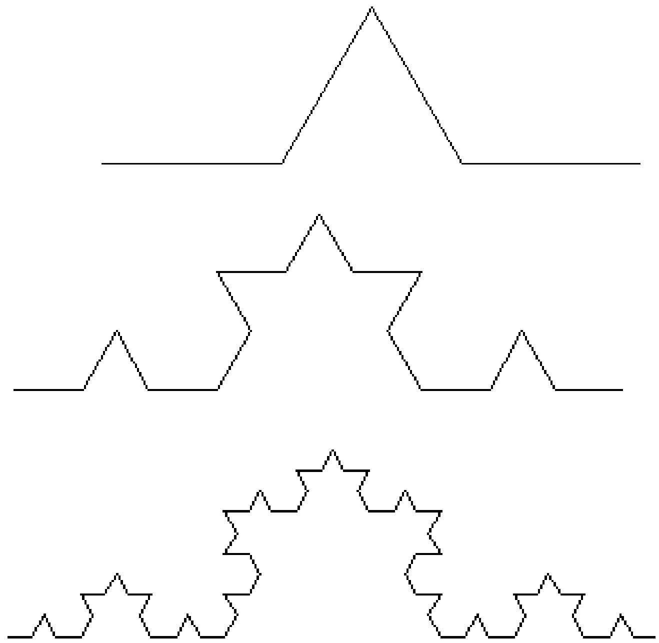
Y son estos hechos los que espantaron a los matemáticos contemporáneos a Mandelbrot y tambiém anteriores a él. Pero no todo es tan malo como parece.

En fin, por las razones que hemos venido presentando, podemos inferir intuitivamente que la Dimensión Fractal es un número entre 1 y 2 (solo para el caso de nuestra línea). Sabemos que NO ES 1, ya que sino estariamos frente a una unidimensión euclideana clásica. Y sabemos que no es 2, porque no se trata de cuerpos que cubran en su totalidad el plano. En definitiva, la Dimensión Fractal por lo general es MAYOR O IGUAL que la Dimensión Topológica. Llamemos Dimensión Topológica (Dt) a la dimensión euclídea común que conocemos, aunque realmente no sea tan así.

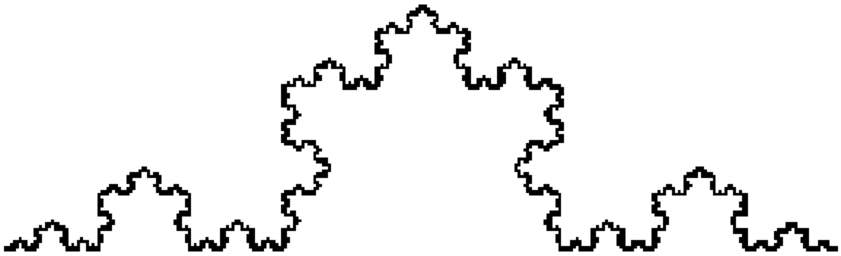
Mas sobre Dimension Fractal

La medición de formas fractales (fronteras, poligonales, etc,) ha obligado a introducir conceptos nuevos que van más allá de los conceptos geométricos clásicos. Dado que un fractal está constituido por elementos cada vez más pequeños, el concepto de longitud no está claramente definido: Cuando se quiere medir una linea fractal con una unidad, o con un instrumento de medida determinado, siempre habrá objetos más finos que escaparán a la sensibilidad de la regla o el instrumento utilizado, y también a medida que aumenta la sensibilidad del instrumento aumenta la longitud de la línea.

Esto sucede con la curva de Koch. Cada paso en la génesis de la curva aumenta un tercio su longitud. Es decir la longitud de la curva que ocupa el espacio inicial va aumentando en cada paso su longitud de forma indefinida. Cada curva es 4/3 de la anterior:



Así por ejemplo en el caso de la curva poligonal de nivel 10, la longitud es 1.(4/3)^(10-1):



De esta forma la curva aumentaría indefinidamente su longitud para un fragmento acotado de curva. ¿Puede esto ser así?.

Como la longitud de la linea fractal depende de la longitud de instrumento, o de la unidad de medida que tomemos, la noción de longitud en estos casos, carece de sentido. Para ello se ha ideado otro concepto: el de dimensión fractal. Que en el caso de las líneas fractales nos va a indicar de qué forma o en que medida una linea fractal llena una porción de plano. Y que además sea una generalización de la dimensión euclidea. Sabemos que en geometría clásica un segmento tiene dimensión uno, un círculo tiene dimensión dos, y una esfera tiene dimensión tres. Para que sea coherente con lo dicho una línea fractal tiene que tener dimensión menor que dos (no llena toda la porción de plano). Y en los casos del conjunto de Cantor y de la curva de Koch menor y mayor que uno respectivamente: En el primer caso no llena todo el segmento de recta, y en el segundo es más largo. Sin embargo el caso del conjunto de Cantor es excepcional y no se puede considerar propiamente un fractal, en general lo que sucede es que la longitud de la curva fractal es superior al del segmento de recta que lo genera, y por tanto en general la dimensión fractal será un número comprendido entre uno y dos.

Como precedente a la dimensión fractal nos encontramos con la dimensión definida por Felix Hausdorff en 1919, perfeccionada más tarde por Besicovitch. La dimensión Hausdorff H(X) de un objeto fractal X mide el número de conjuntos de longitud L que hacen falta para cubrir X por L.

La dimensión fractal, D, como veremos es una generalización de la dimensión euclidea, DE. Si partimos de un segmento de longitud 1, y lo partimos en segmentos de longitud L obtendremos N(L) partes, de manera que

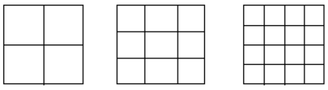
N(L).L^1 = 1

cualquiera que sea L:

Si el objeto inicial es un cuadrado de superficie 1, y lo comparamos con unidades cuadradas, cuyo lado tenga de longitud L, el número de unidades que es necesario para recubrirlo N(L), cumple

N(L).L^2 = 1

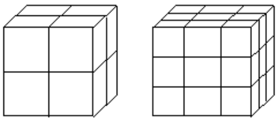
cualquiera que sea L:



Si, por último, el objeto que tomamos es tridimensional, como, por ejemplo, un cubo de volumen 1, y lo medimos en relación con unidades que sean cubos de arista L, entonces se cumple que

N(L).L^3 = 1

Cualquiera que sea L:



De todo esto podemos generalizar que la dimensión fractal de un objeto geométrico es D si

N(L).L^D = 1

donde N(L) es el número de objetos elementales, o de unidades, de tamaño L que recubren, o que completan, el objeto.

De donde deducimos, despejando D, que

D= log (N(L))/log(1/L)

De aquí podemos deducir las dimensiones del conjunto de Cantor

D= log(2)/log(3) = 0'6309...

La de la curva de Koch

D = log(4)/log(3) = 1'2618...

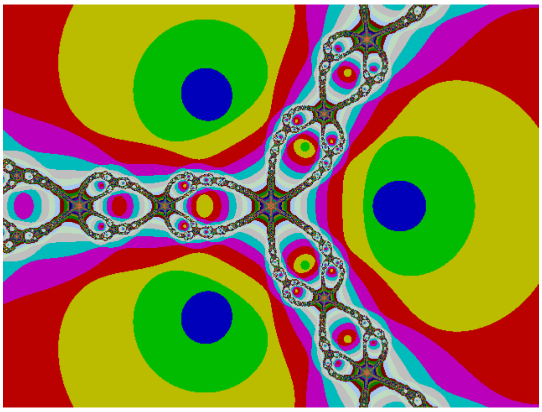
Sin embargo se suele aceptar, e incluso definir, que un objeto es fractal solo cuando su dimensión fractal es mayor que su dimensión euclidea:

D>DE

Así por ejemplo no se considera fractal el conjunto de Cantor.

APLICACIONES DE LOS FRACTALES

Aunque puedan parecer simples figuras creadas para entretener a los matemáticos, existen muchas aplicaciones de los fractales tanto a nivel teórico como en el práctico. Teniendo en cuenta la gran amplitud del campo de su aplicación, a continuación nos vamos a limitar a enumerar las más llamativa y, por decirlo de algún modo, las que resultan más espectaculares.

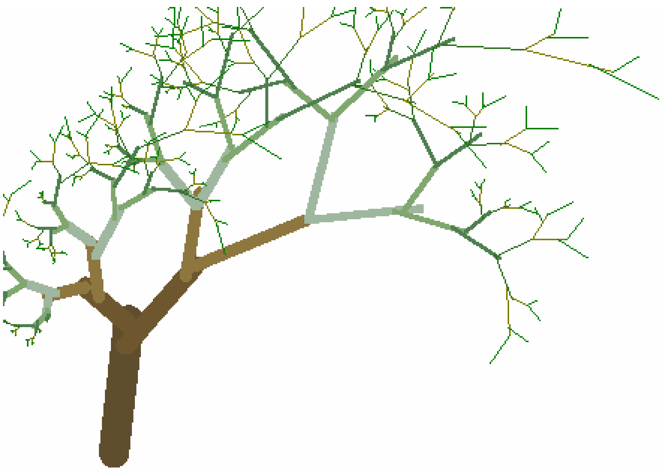


Desde luego, su aplicación en el campo de las ciencias abstractas ha sido realmente grande. Una de sus aplicaciones más inmediatas es el estudio de las soluciones de sistemas de ecuaciones de más de segundo grado. De hecho, en los albores del estudio de los fractales, John Hubbard, matemático estadounidense, represento en un plano el modo como el método de Newton, para resolver ecuaciones, lleva desde diferentes puntos iniciales a cada una de las soluciones. Anteriormente se pensaba que cada solución tendría una cuenca de atracción que dividiría el plano en varias partes y que cuyos puntos condujeran a dicha solución. Sin embargo, mediante la exploración por ordenador y la asignación de un color a cada cuenca, Hubbard comprobó que los límites de estas regiones del plano no estaban de ninguna manera bien definidos. En estos límites se encontraba puntos de un color dentro de otros puntos de color y conforme la rejilla de números se iba ampliando más compleja se iba revelando la frontera. En realidad, podía considerarse que no existía tal frontera.

Aunque también existen muchas aplicaciones en materias tan diversas como la física o la sismología, desde luego el campo en el que más aplicaciones se han encontrado ha sido en el tratamiento de las imágenes. En realidad, más que de aportaciones, debe hablarse de una verdadera revolución. Michael Barnsley fue el pionero en el tratamiento de imágenes a partir de su denominada *transformación fractal*. Ésta consiste en el proceso contrario a la formación de un fractal, es decir, en lugar de crear una figura a partir de unas reglas determinadas, se buscan las reglas que forman una figura más determinada.

Trabajo de Ewaldo Hott y Pablo Gutierrez 4º Medio Matematico 2004

Actualmente, los fractales se utilizan para comprimir imágenes digitalizadas de forma que ocupen menos espacio y puedan ser transmitidas a una mayor velocidad y coste menor. Además, resultan de gran utilidad a la hora de crear los espectaculares efectos especiales de las grandes superproducciones, ya que es relativamente fácil crear todo tipo de paisajes y fondos a través de los fractales. Tan simple que con un pequeño programa de ordenador que ocupa un reducido espacio, puede crearse un bonito árbol a partir de un simple esquema.



Igualmente la revolución de los fractales afecta al mundo de la música, ya que está muy

extendida la utilización de procedimientos fractales para la composición, en especial, de música tecno o de bases rítmicas para cualquier otro tipo de música.

Además, el concepto de fractal y su dimensión han tenido gran repercusión en el campo de la biología. Por un lado, se pueden apreciar grandes ejemplos de estructuras fractales en el cuerpo humano como la red de venas y arterias. A partir de un vaso sanguíneo grande como la aorta van saliendo vasos más pequeños hasta la aparición de los finísimos capilares de forma que cubran el mayor espacio posible para llevar nutrientes a las células. Por otro, se cree adivinar cierta similitud entre la generación de fractales y

el código genético, ya que en ambos casos a partir de una información muy reducida en apariencia, surgen complejas estructuras.

Compresión de Imágenes

Una de las aplicaciones más utiles de los fractales y de la geometría fractal está en la compresión de imágenes. Es también una de las ideas más controversiales. El concepto básico detrás de la compresión fractal de imágenes es tomar una imagen y expresarla como un Sistema de Funciones Iteradas (SFI). Un SFI es el conjunto de funciones que describen partes de un fractal que, una vez juntas, recrean dicho fractal en su totalidad. Si un fractal puede ser descripto por un número pequeño de funciones, el SFI es una descripción bastante compacta del fractal. La imagen puede ser rápidamente desplegada y a cualquier grado de magnificación con infinitos niveles de detalle fractal. El mayor problema detrás de esta idea es encontrar el SFI que describa la imagen.

Efectos Visuales

Una de las más triviales aplicaciones de los fractales son sus efectos visuales. No solamente engañan la vista, sino que también de algún modo confunden a la mente. Los fractales han estado siendo usados comercialmente en la industria cinematográfica, en películas como Star Wars y Star Trek. Las imágenes fractales son usadas como una alternativa ante costosos sets elaborados para producir paisajes fabulosos.

Música Fractal

Otra aplicación de los fractales aparentemente irrelevante es la música fractal. Ciertas músicas, incluyendo las de Bach y las de Mozart, pueden ser reducidas y todavía retener la esencia del compositor. Están siendo desarrolladas muchas nuevas aplicaciones software para el desarrollo de música fractal.

Después de todo lo expuesto anteriormente, podemos concluir que, aunque la geometría fractal aún no se haya entendido completamente, posee aplicaciones realmente útiles en distintos campos, y es en sí sumamente fascinante.

Muchos investigadores continúan su exploración a través de esta área, como Douady, Hubbard, Yoccoz, McMullen y otros, pero mucho más queda por ser descubierto.

CONCLUSIÓN

A lo largo de este trabajo hemos ido descubriendo en qué consisten ese tipo de figuras tan complicadas de apariencia diabólica. En general, hemos intentado darle un enfoque fenomenológico que esté al alcance de todos los que, como nosotros, no poseemos un gran dominio de las matemáticas.

De todas maneras, no debemos olvidar que tanto el estudio del caos como el de los fractales se encuentra en plena evolución y, en la realidad, son conceptos poco conocidos por una amplia mayoría. Sin embargo, todo el mundo sabe exactamente lo que es un círculo o un cubo, lo que es ciertamente extraño, pues, en nuestra opinión, los fractales representan más ajustadamente la naturaleza de las cosas. Durante miles de años, el hombre ha intentado adaptar el medio, completamente irregular en todos los sentidos, a su forma de pensar y de entenderlo despreciando la complejidad y condenando la irregularidad como producto del azar y del comportamiento caprichoso de la naturaleza.

No queremos decir con esto que el mundo entero se rija por las reglas de los fractales, pues esto sería una simple e inútil simplificación más, pero consideramos que la ciencia del caos y los fractales realizan una gran aportación al mundo de la ciencia, no sólo en conocimientos concretos, sino como una nueva forma de concebir las cosas y resolver los problemas que se nos plantean. En el fondo subyace la comprensión del mundo en movimiento como un proceso global que no para o se detiene en ningún punto, sino que continúa y continúa de la misma manera que iteramos una función para conseguir una figura fractal.

Por último, nos gustaría recordar y alabar el trabajo de muchos hombres como Poincaré, Feigenbaum, Mandelbrot y tantos otros, gracias a los cuales ha sido posible el nacimiento de una nueva disciplina, el caos, y una nueva forma de entender la geometría, los fractales. Sin embargo, en nuestra opinión, el caos no puede ser considerada simplemente como una ciencia en sí misma, ya que, teniendo en cuenta su aplicación en tan diversos campos, la consideramos más bien como una herramienta para entender los distintos procesos que se producen en tan diferentes ciencias como la física o la economía.

Actividad 4: Patrones fractales naturales
Belleza fractal de una gota de pintura

Esta acritividad me la enseñó la Dra. Linda Shore, una física del Exploratorium. Con sus antiguos colegas de la Universidad de Boston, desarrolló estas actividades para llevar los fractales al aula.

Materiales

- 2 pedazos de material con superficie lisa y sólida. Puede ser un par de láminas para telescopio cubiertas con cinta adhesiva transparente, para que sean reusables.
- Otros materiales posibles: Cartón laminado rígido, plástico rígido #6. plexiglas acrílico
- Pintura brillante para modelos (Pintura Testor Gloss Enamel o Liquetex Acrylic "Glossies")
- clip (si usa pintura Testor)
- papel para entrapar y limpiar.

Procedimiento

Si usa pintura Liquitex:
agite la botella y coloque una pequeña gota de pintura sobre la superficie que va a usar.

Si es pintura Testor Paint:
Use un clip estirado, para revolver la pintura, Luego, con el mismo clip, tome un poco de pintura y transfiera una gota a la superficie.

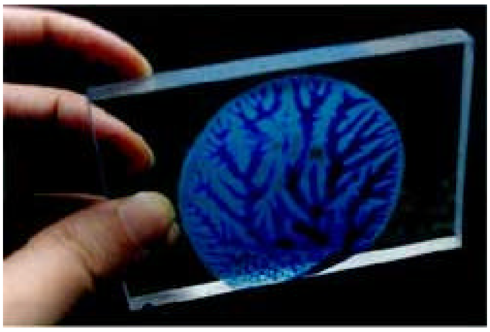
Paso 1:

Coloque la segunda lámina sobre la pintura y como si fuera un sandwich, oprímalas para que la pintura se distribuya en una capa delgada y círcular.

Paso 2:

Ahora despegue las láminas con cuidado, no las reslice. Notará las bolsas de aire que se van formando conforme las despega. Permita que los patrones se sequen.

Observe el detalle en cada lado, resultarán imágenes espejo.



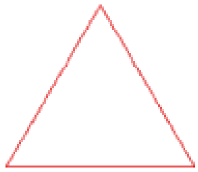
¿Qué pasó?
El patrón fractal que se creó con una gota de pintura es el resultado de un proceso aleatorio.

Al apretar las dos láminas rígidas y lisas, con la gota de pintura en medio, esta se extiende por su viscosidad, hasta formar un círculo, desplazando el aire y creando una barrera estable en forma de disco.

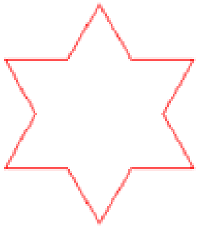
Cuando las láminas son separadas, el aire que es menos viscoso, se introduce en la pintura, creando barreras inestables. Entonces crecen pequeñas indentaciones y se forman dedos de aire, que separan la pintura. Este proceso se llama indentación viscosa (viscous fingering) y es el que mejor describe los fractales en la naturaleza.

Trabajo de Ewaldo Hott y Pablo Gutierrez 4º Medio Matematico 2004

Actividad 1:
Patrones fractales geométricos
Curva de Koch (curva de Copo de nieve)
Uno de los más sencillos y más elegantes que conozco.

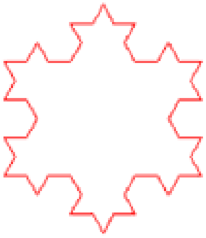


Paso 1: Un triángulo equilátero inscrito en un círculo (no mostrado) es la primera iteración de este patrón. El largo de cada lado es 1, el perímetro = 3.

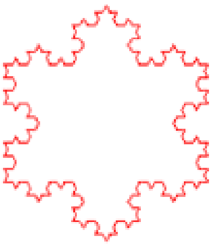


Paso 2: Divida cada lado del triángulo en 3 partes iguales y dibuje otro triángulo equilátero en el segmento central.

Así resulta una estrella de seis esquinas como segunda iteración. Su perímetro = 3 x 4/3



Paso 3: En la tercera iteración del patrón, P = 3 x 4/3 x 4/3.



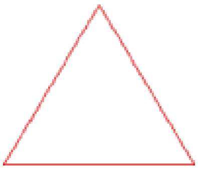
Teóricamente usted puede repetir los pasos, dibujando triángulos equiláteros infinitamente.

Siga calculando el perímetro.

Lo interesante es notar que el perímetro sigue creciendo, conforme el copo crece, mientras que el área no sobrepasa la del círculo exterior.

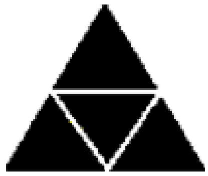
Actividad 2:
Patrones fractales geométricos
El triángulo de Sierpinski

Paso 0: Dibuje un triángulo equilátero cuyo lado mida 8 cm.



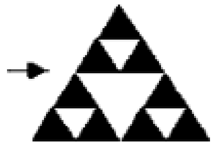
Trabajo de Ewaldo Hott y Pablo Gutierrez 4º Medio Matematico 2004

Paso 1: Conecte los puntos centrales de cada uno de los lados entre sí. La línea interna medirá =4cm.



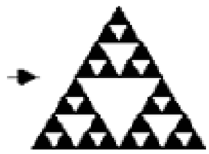
Paso 2: Coloree todos los triángulos con la punta hacia arriba, para difenciar su orientación.

Paso 3: Divida nuevamente, como en el paso 1, **siempre desde los lados exteriores**. Las nuevas líneas internas miden = 1cm. Coloree los triángulos con la punta hacia arriba. Observe que el triángulo interno queda vacío.



Paso 4: Divida nuevamente. Coloree los que quedan orientados con la punta hacia arriba.

¿Cuánto miden los lados de triángulos más pequeños?

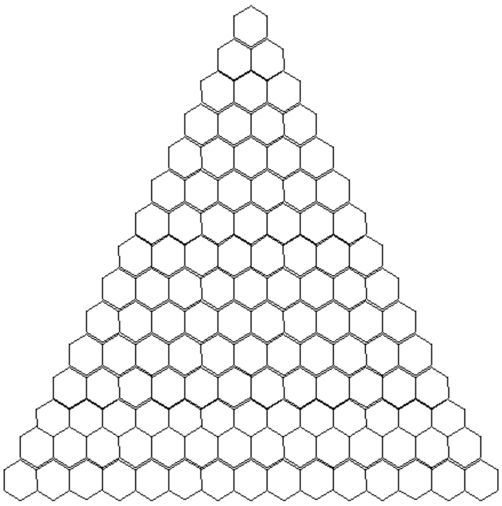


Paso 1: Coloque los valores de los números dados por filas. Las filas están compuestas de la suma de los números arriba, empezando con 1 en la primer casilla y siempre sumando 1 a cada lado.
Las filas son los coeficientes de la expansión polinomial (x+1)n, empezando con n = 0 y las potencia de 11, (de 110 to 114).

Paso 2: Coloree los números impares y observe el patrón que se genera.

Paso 3: Empiece de nuevo y coloree los múltiplos de 3, o los de 5, o 9.

Trabajo de Ewaldo Hott y Pablo Gutierrez 4º Medio Matematico 2004



FRACTALES EN LA NATURALEZA:

Las formas de la naturaleza son fractales y múltiples procesos de la misma se rigen por comportamientos fractales.Esto quiere decir que una nube o una costa pueden definirse por un modelo matemático fractal que se aproxime satisfactoriamente al objeto real. Esta aproximación se realiza en toda una franja de escalas , limitadas por valores mínimos y máximos.

EJEMPLOS DE MODELOS FRACTALES:

LORENZ turbulencias atmosféricas y corrientes marinas.
HENON oscilaciones sufridas por cuerpos celestes que hacen que su trayectoria no sea completamente elíptica.
CURVAS DE KOCH ALEATORIA fronteras de un país, trazado de una costa, trazado de un río.
FRACTALES tipo ARBOL sistema arteriales y venosos.

ELEMENTOS DE LA NATURALEZA QUE PUEDEN ESTUDIARSE MEDIANTE UN MODELO FRACTAL:

CUERPO HUMANO abundan las estructuras fractales:

Redes nerviosas.

Redes de vasos sanguíneos.

Conductos biliares.

Sistemas de tubos pulmonares y bronquios

ELEMENTOS DE LA NATURALEZA:

Montañas

Coníferas

Sauces