Tendencias Innovadoras en Educación Matemática

Miguel de Guzmán

En los años 1990 la OEI (Organización de Estados Iberoamericanos) que gestionaba el programa IBERCIMA, para la mejora de la educación en los países iberoamericanos de la educación en ciencias y matemáticas, me invitó a presentar para diversas reuniones y para una publicación mis consideraciones sobre la educación matemática en aquellos momentos. El resultado fue este largo artículo que fue publicado en 1994 conjuntamente con otro de Daniel Gil Pérez sobre la enseñanza de las ciencias. Su largo índice puede proporcionar una guía de lectura adecuada.

Índice

0.- Introducción

Las notas que siguen contienen una serie de observaciones personales sobre algunos aspectos del panorama actual de la educación matemática, que, por diversas razones que intentaré explicar, distan mucho de haber alcanzado una fase de estabilidad. En su conjunto, parece que la educación matemática, por su propia naturaleza, como se indica en la Sección 1, deba ser uno de esos temas complicados que haya de permanecer en constante revisión. En la Sección 2 se presentan unas cuantas reflexiones sobre la situación de cambio en la que actualmente nos encontramos, señalando las razones profundas que nos mueven en la actualidad para desear salir de algunas vías menos deseables en las que la enseñanza matemática se introdujo en un pasado reciente. La Sección 3 se dedica a apuntar algunas tendencias generales que señalan las líneas de trabajo más llamativas en la actualidad. De estas tendencias se derivan de forma natural, por una parte, algunos cambios en los principios metodológicos que deberían guiar la enseñanza y aprendizaje de nuestros días, lo que se presenta en la Sección 4, y por otra, cambios en los contenidos mismos de nuestra educación, más acordes con las finalidades que hoy se pretenden, tal como queda explicado en la Sección 5. Finalmente, la Sección 6 presenta unos pocos proyectos que, a mi parecer, sería deseable que nuestra comunidad matemática fuese realizando para conseguir una educación más sana y eficaz. La bibliografía al final del trabajo remite a unos pocos artículos clave, cuyas bibliografías extensas pueden servir como fuente de información más profunda.

1. ¿Por qué la Enseñanza de la Matemática es tarea difícil?

La matemática es una actividad vieja y polivalente. A lo largo de los siglos ha sido empleada con objetivos profundamente diversos. Fue un instrumento para la elaboración de vaticinios, entre los sacerdotes de los pueblos mesopotámicos. Se consideró como un medio de aproximación a una vida más profundamente humana y como camino de acercamiento a la divinidad, entre los pitagóricos. Fue utilizado como un importante elemento disciplinador del pensamiento, en el Medievo. Ha sido la más versátil e idónea herramienta para la exploración del universo, a partir del Renacimiento. Ha constituido una magnífica guía del pensamiento filosófico, entre los pensadores del racionalismo y filósofos contemporáneos. Ha sido un instrumento de creación de belleza artística, un campo de ejercicio lúdico, entre los matemáticos de todos los tiempos...

Por otra parte, la matemática misma es una ciencia intensamente dinámica y cambiante. De manera rápida y hasta turbulenta en sus propios contenidos. Y aun en su propia concepción profunda, aunque de modo más lento. Todo ello sugiere que, efectivamente, la actividad matemática no puede ser una realidad de abordaje sencillo.

El otro miembro del binomio educación-matemática, no es tampoco nada simple. La educación ha de hacer necesariamente referencia a lo más profundo de la persona, una persona aún por conformar, a la sociedad en evolución en la que esta persona se ha de integrar, a la cultura que en esta sociedad se desarrolla, a los medios concretos personales y materiales de que en el momento se puede o se quiere disponer, a las finalidades prioritarias que a esta educación se le quiera asignar, que pueden ser extraordinariamente variadas...

La complejidad de la matemática y de la educación sugiere que los teóricos de la educación matemática, y no menos los agentes de ella, deban permanecer constantemente atentos y abiertos a los cambios profundos que en muchos aspectos la dinámica rápidamente mutante de la situación global venga exigiendo.

La educación, como todo sistema complejo, presenta una fuerte resistencia al cambio. Esto no es necesariamente malo. Una razonable persistencia ante las variaciones es la característica de los organismos vivos sanos. Lo malo ocurre cuando esto no se conjuga con una capacidad de adaptación ante la mutabilidad de las circunstancias ambientales.

En la educación matemática a nivel internacional apenas se habían producido cambios de consideración desde principios de siglo hasta los años 60. A comienzos de siglo había tenido lugar un movimiento de renovación en educación matemática, gracias al interés inicialmente despertado por la prestigiosa figura del gran matemático alemán Félix Klein, con sus proyectos de renovación de la enseñanza media y con sus famosas lecciones sobre Matemática elemental desde un punto de vista superior (1908). En nuestro país ejercieron gran influencia a partir de 1927, por el interés de Rey Pastor, quien publicó, en su Biblioteca Matemática, su traducción al castellano.

En los años 60 surgió un fuerte movimiento de innovación. Se puede afirmar con razón que el empuje de renovación de aquel movimiento, a pesar de todos los desperfectos que ha traído consigo en el panorama educativo internacional, ha tenido, con todo, la gran virtud de llamar la atención sobre la necesidad de alerta constante sobre la evolución del sistema educativo en matemáticas a todos los niveles. Los cambios introducidos en los años 60 han provocado mareas y contramareas a lo largo de la etapa intermedia. Hoy día, podemos afirmar con toda justificación que seguimos estando en una etapa de profundos cambios.

2. Situación actual de cambio en la didáctica de la matemática

Los últimos treinta años han sido escenario de cambios muy profundos en la enseñanza de las matemáticas. Por los esfuerzos que la comunidad internacional de expertos en didáctica sigue realizando por encontrar moldes adecuados está claro que vivimos aún actualmente una situación de experimentación y cambio.

El movimiento de renovación de los años 60 y 70 hacia la «matemática moderna» trajo consigo una honda transformación de la enseñanza, tanto en su talante profundo como en los contenidos nuevos con él introducidos. Entre las principales características del movimiento y los efectos por él producidos se pueden contar los siguientes:

- Se subrayaron las estructuras abstractas en diversas áreas, especialmente en álgebra.

- Se pretendió profundizar en el rigor lógico, en la comprensión, contraponiendo ésta a los aspectos operativos y manipulativos.

- Esto último condujo de forma natural al énfasis en la fundamentación a través de las nociones iniciales de la teoría de conjuntos y en el cultivo del álgebra, donde el rigor es fácilmente alcanzable.

- La geometría elemental y la intuición espacial sufrió un gran detrimento. La geometría es, en efecto, mucho más difícil de fundamentar rigurosamente.

- Con respecto a las actividades fomentadas, la consecuencia natural fue el vaciamiento de problemas interesantes, en los que la geometría elemental tanto abunda, y su sustitución por ejercicios muy cercanos a la mera tautología y reconocimiento de nombres, que es, en buena parte, lo que el álgebra puede ofrecer a este nivel elemental.

En los años 70 se empezó a percibir que muchos de los cambios introducidos no habían resultado muy acertados. Con la sustitución de la geometría por el álgebra la matemática elemental se vació rápidamente de contenidos y de problemas interesantes. La patente carencia de intuición espacial fue otra de las desastrosas consecuencias del alejamiento de la geometría de nuestros programas, defecto que hoy se puede percibir muy claramente en las personas que realizaron su formación en aquellos años. Se puede decir que los inconvenientes surgidos con la introducción de la llamada «matemática moderna» superaron con mucho las cuestionables ventajas que se había pensado conseguir, como el rigor en la fundamentación, la comprensión de las estructuras matemáticas, la modernidad y el acercamiento a la matemática contemporánea…

Los años 70 y 80 han presentado una discusión, en muchos casos vehemente y apasionada, sobre los valores y contravalores de las tendencias presentes, y luego una búsqueda intensa de formas más adecuadas de afrontar los nuevos retos de la enseñanza matemática por parte de la comunidad matemática internacional.

A continuación quisiera dirigir mi atención sucesivamente sobre los aspectos más interesantes, a mi parecer, de esta búsqueda y de algunas respuestas parciales que van surgiendo en el panorama educativo de la matemática.

3. Tendencias generales actuales

3.1 Una consideración de fondo. ¿Qué es la actividad matemática?

La filosofía prevalente sobre lo que la actividad matemática representa tiene un fuerte influjo, más efectivo a veces de lo que aparenta, sobre las actitudes profundas respecto de la enseñanza matemática. La reforma hacia la «matemática moderna» tuvo lugar en pleno auge de la corriente formalista (Bourbaki) en matemáticas. No es aventurado pensar a priori en una relación causa-efecto y, de hecho, alguna de las personas especialmente influyentes en el movimiento didáctico, como Dieudonné, fueron importantes miembros del grupo Bourbaki. En los últimos quince años, especialmente a partir de la publicación de la tesis doctoral de I. Lakatos (1976), Proofs and refutations, se han producido cambios bastante profundos en el campo de las ideas acerca de lo que verdaderamente es el quehacer matemático.

La actividad científica en general es una exploración de ciertas estructuras de la realidad, entendida ésta en sentido amplio, como realidad física o mental. La actividad matemática se enfrenta con un cierto tipo de estructuras que se prestan a unos modos peculiares de tratamiento, que incluyen:

a) una simbolización adecuada, que permite presentar eficazmente, desde el punto de vista operativo, las entidades que maneja;

b) una manipulación racional rigurosa, que compele al asenso de aquellos que se adhieren a las convenciones iniciales de partida;

c) un dominio efectivo de la realidad a la que se dirige, primero racional, del modelo mental que se construye, y luego, si se pretende, de la realidad exterior modelada.

La antigua definición de la matemática como ciencia del número y de la extensión, no es incompatible en absoluto con la aquí propuesta, sino que corresponde a un estadio de la matemática en que el enfrentamiento con la realidad se había plasmado en dos aspectos fundamentales, la complejidad proveniente de la multiplicidad (lo que da origen al número, a la aritmética) y la complejidad que procede del espacio (lo que da lugar a la geometría, estudio de la extensión). Más adelante el mismo espíritu matemático se habría de enfrentar con:

- la complejidad del símbolo (álgebra);

- la complejidad del cambio y de la causalidad determinística (cálculo);

- la complejidad proveniente de la incertidumbre en la causalidad múltiple incontrolable (probabilidad, estadística);

- complejidad de la estructura formal del pensamiento (lógica matemática)...

La filosofía de la matemática actual ha dejado de preocuparse tan insistentemente como en la primera mitad del siglo sobre los problemas de fundamentación de la matemática, especialmente tras los resultados de Gödel a comienzos de los años 30, para enfocar su atención en el carácter cuasiempírico de la actividad matemática (I. Lakatos), así como en los aspectos relativos a la historicidad e inmersión de la matemática en la cultura de la sociedad en la que se origina (R. L.

Wilder), considerando la matemática como un subsistema cultural con características en gran parte comunes a otros sistemas semejantes. Tales cambios en lo hondo del entender y del sentir mismo de los matemáticos sobre su propio quehacer vienen provocando, de forma más o menos consciente, fluctuaciones importantes en las consideraciones sobre lo que la enseñanza matemática debe ser.

3.2. La educación matemática como proceso de «inculturación»

La educación matemática se debe concebir como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático, a la manera como el aprendiz de artista va siendo imbuido, como por ósmosis, en la forma peculiar de ver las cosas característica de la escuela en la que se entronca. Como vamos a ver en seguida, esta idea tiene profundas repercusiones en la manera de enfocar la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

3.3. Continuo apoyo en la intuición directa de lo concreto. Apoyo permanente en lo real

En los años 80 hubo un reconocimiento general de que se había exagerado considerablemente en las tendencias hacia la «matemática moderna» en lo que respecta al énfasis en la estructura abstracta de la matemática. Es necesario cuidar y cultivar la intuición en general, la manipulación operativa del espacio y de los mismos símbolos. Es preciso no abandonar la comprensión e inteligencia de lo que se hace, por supuesto, pero no debemos permitir que este esfuerzo por entender deje pasar a segundo plano los contenidos intuitivos de nuestra mente en su acercamiento a los objetos matemáticos. Si la matemática es una ciencia que participa mucho más de lo que hasta ahora se pensaba del carácter de empírica, sobre todo en su invención, que es mucho más interesante que su construcción formal, es necesario que la inmersión en ella se realice teniendo en cuenta mucho más intensamente la experiencia y la manipulación de los objetos de los que surge. La formalización rigurosa de las experiencias iniciales corresponde a un estadio posterior. A cada fase de desarrollo mental, como a cada etapa histórica o a cada nivel científico, le corresponde su propio rigor.

Para entender esta interacción fecunda entre la realidad y la matemática es necesario acudir, por una parte, a la propia historia de la matemática, que nos desvela ese proceso de emergencia de nuestra matemática en el tiempo, y por otra parte, a las aplicaciones de la matemática, que nos hacen patentes la fecundidad y potencia de esta ciencia. Con ello se hace obvio cómo la matemática ha procedido de forma muy semejante a las otras ciencias, por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas, unas veces fructuosas, otras estériles, hasta que va alcanzando una forma más madura, aunque siempre perfectible. Nuestra enseñanza ideal debería tratar de reflejar este carácter profundamente humano de la matemática, ganando con ello en asequibilidad, dinamismo, interés y atractivo.

3.4. Los procesos del pensamiento matemático. El centro de la educación matemática

Una de las tendencias generales más difundidas hoy consiste en el hincapié en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática, más bien que en la mera transferencia de contenidos. La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello se concede una gran importancia al estudio de las cuestiones, en buena parte colindantes con la psicología cognitiva, que se refieren a los procesos mentales de resolución de problemas.

Por otra parte, existe la conciencia, cada vez más acusada, de la rapidez con la que, por razones muy diversas, se va haciendo necesario traspasar la prioridad de la enseñanza de unos contenidos a otros. En la situación de transformación vertiginosa de la civilización en la que nos encontramos, es claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos proporcionar a nuestros jóvenes. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en lo que Whitehead llamó «ideas inertes», ideas que forman un pesado lastre, que no son capaces de combinarse con otras para formar constelaciones dinámicas, capaces de abordar los problemas del presente.

En esta dirección se encauzan los intensos esfuerzos por transmitir estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas en general, por estimular la resolución autónoma de verdaderos problemas, más bien que la mera transmisión de recetas adecuadas en cada materia.

3.5. Los impactos de la nueva tecnología

La aparición de herramientas tan poderosas como la calculadora y el ordenador actuales está comenzando a influir fuertemente en los intentos por orientar nuestra educación matemática primaria y secundaria adecuadamente, de forma que se aprovechen al máximo de tales instrumentos. Es claro que, por diversas circunstancias tales como coste, inercia, novedad, impreparación de profesores, hostilidad de algunos... aún no se ha logrado encontrar moldes plenamente satisfactorios. Este es uno de los retos importantes del momento presente. Ya desde ahora se puede presentir que nuestra forma de enseñanza y sus mismos contenidos tienen que experimentar drásticas reformas. El acento habrá que ponerlo, también por esta razón, en la comprensión de los procesos matemáticos más bien que en la ejecución de ciertas rutinas que en nuestra situación actual ocupan todavía gran parte de la energía de nuestros alumnos, con el consiguiente sentimiento de esterilidad del tiempo que en ello emplean. Lo verdaderamente importante vendrá a ser su preparación para el diálogo inteligente con las herramientas que ya existen, de las que algunos ya disponen y otros van a disponer en un futuro que ya casi es presente.

3.6 Conciencia de la importancia de la motivación

Una preocupación general que se observa en el ambiente conduce a la búsqueda de la motivación del alumno desde un punto de vista más amplio, que no se limite al posible interés intrínseco de la matemática y de sus aplicaciones. Se trata de hacer patentes los impactos mutuos que la evolución de la cultura, la historia, los desarrollos de la sociedad, por una parte, y la matemática, por otra, se han proporcionado.

Cada vez va siendo más patente la enorme importancia que los elementos afectivos que involucran a toda la persona pueden tener incluso en la vida de la mente en su ocupación con la matemática. Es claro que una gran parte de los fracasos matemáticos de muchos de nuestros estudiantes tienen su origen en un posicionamiento inicial afectivo totalmente destructivo de sus propias potencialidades en este campo, que es provocado, en muchos casos, por la inadecuada introducción por parte de sus maestros. Por eso se intenta también, a través de diversos medios, que los estudiantes perciban el sentimiento estético, el placer lúdico que la matemática es capaz de proporcionar, a fin de involucrarlos en ella de un modo más hondamente personal y humano.

En nuestro ambiente contemporáneo, con una fuerte tendencia hacia la deshumanización de la ciencia, a la despersonalización producida por nuestra cultura computarizada, es cada vez más necesario un saber humanizado en que el hombre y la máquina ocupen cada uno el lugar que le corresponde. La educación matemática adecuada puede contribuir eficazmente en esta importante tarea.

4. Cambios en los principios metodológicos aconsejables

A la vista de estas tendencias generales apuntadas en la sección anterior se pueden señalar unos cuantos principios metodológicos que podrían guiar apropiadamente nuestra enseñanza.

4.1. Hacia la adquisición de los procesos típicos del pensamiento matemático. La inculturación a través del aprendizaje activo.

¿Cómo debería tener lugar el proceso de aprendizaje matemático a cualquier nivel? De una forma semejante a la que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas, de modo parecido al que el matemático activo utiliza al enfrentarse con el problema de matematización de la parcela de la realidad de la que se ocupa.

Se trata, en primer lugar, de ponernos en contacto con la realidad matematizable que ha dado lugar a los conceptos matemáticos que queremos explorar con nuestros alumnos. Para ello deberíamos conocer a fondo el contexto histórico que enmarca estos conceptos adecuadamente. ¿Por qué razones la comunidad matemática se ocupó con ahínco en un cierto momento de este tema y lo hizo el verdadero centro de su exploración tal vez por un período de siglos? Es extraordinariamente útil tratar de mirar la situación con la que ellos se enfrentaron con la mirada perpleja con que la contemplaron inicialmente. La visión del tema que se nos brinda en muchos de nuestros libros de texto se parece en demasiadas ocasiones a una novela policiaca que aparece ya destripada desde el principio por haber comenzado contando el final. Contada de otra forma más razonable podría ser verdaderamente apasionante.

Normalmente la historia nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés. Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir, la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado...

En otras ocasiones el acercamiento inicial se puede hacer a través del intento directo de una modelización de la realidad en la que el profesor sabe que han de aparecer las estructuras matemáticas en cuestión. Se puede acudir para ello a las otras ciencias que hacen uso de las matemáticas, a circunstancias de la realidad cotidiana o bien a la presentación de juegos tratables matemáticamente, de los que en más de una ocasión a lo largo de la historia han surgido ideas matemáticas de gran profundidad, como veremos más adelante.

Puestos con nuestros estudiantes delante de las situaciones-problema en las que tuvo lugar la gestación de las ideas con las que queremos ocupamos, deberemos tratar de estimular su búsqueda autónoma, su propio descubrimiento paulatino de estructuras matemáticas sencillas, de problemas interesantes relacionados con tales situaciones que surgen de modo natural.

Es claro que no podemos esperar que nuestros alumnos descubran en un par de semanas lo que la humanidad elaboró tal vez a lo largo de varios siglos de trabajo intenso de mentes muy brillantes. Pero es cierto que la búsqueda con guía, sin aniquilar el placer de descubrir, es un objetivo alcanzable en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como la detección de técnicas concretas, de estrategias útiles de pensamiento en el campo en cuestión y de su transmisión a los estudiantes.

La teoría, así concebida, resulta llena de sentido, plenamente motivada y mucho más fácilmente asimilable. Su aplicación a la resolución de los problemas, que en un principio aparecían como objetivos inalcanzables, puede llegar a ser una verdadera fuente de satisfacción y placer intelectual, de asombro ante el poder del pensamiento matemático eficaz y de una fuerte atracción hacia la matemática.

4.2. Sobre el papel de la historia en el proceso de formación del matemático

A mi parecer, un cierto conocimiento de la historia de la matemática, debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel, primario, secundario o terciario, en particular. Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino primariamente porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado.

La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Cuántos de esos teoremas, que en nuestros días de estudiantes nos han aparecido como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico y biográfico.

La perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos, por motivaciones muy distintas.

Desde el punto de vista del conocimiento más profundo de la propia matemática, la historia nos proporciona un cuadro en el que los elementos aparecen en su verdadera perspectiva, lo que redunda en un gran enriquecimiento tanto para el matemático técnico, como para el que enseña. Si cada porción de conocimiento matemático de nuestros libros de texto llevara escrito el número de un siglo al que se le pudiera asignar con alguna aproximación, veríamos saltar locamente los números, a veces dentro de la misma página o del mismo párrafo. Conjuntos, números naturales, sistemas de numeración, números racionales, reales, complejos, ... decenas de siglos de distancia hacia atrás, hacia adelante, otra vez hacia atrás, vertiginosamente. No se trata de que tengamos que hacer conscientes a nuestros alumnos de tal circunstancia. El orden lógico no es necesariamente el orden histórico, ni tampoco el orden didáctico coincide con ninguno de los dos. Pero el profesor debería saber cómo han ocurrido las cosas, para:

- comprender mejor las dificultades del hombre genérico, de la humanidad, en la elaboración de las ideas matemáticas, y a través de ello las de sus propios alumnos;

- entender mejor la ilación de las ideas, de los motivos y variaciones de la sinfonía matemática;

-utilizar este saber como una sana guía para su propia pedagogía.

El conocimiento de la historia proporciona una visión dinámica de la evolución de la matemática. Se puede barruntar la motivación de las ideas y desarrollos en el inicio. Ahí es donde se pueden buscar las ideas originales en toda su sencillez y originalidad, todavía con u sentido de aventura, que muchas veces se hace desaparecer en los textos secundarios. Como dice muy acertadamente O. Toeplitz:

> *«Con respecto a todos los temas básicos del cálculo infinitesimal...teorema del valor medio, serie de Taylor,... nunca se suscita la cuestión ¿Por qué así precisamente? o ¿Cómo se llegó a ello? Y sin embargo, todas estas cuestiones han tenido que ser en algún tiempo objetivos de una intensa búsqueda, respuestas a preguntas candentes... Si volviéramos a los orígenes de estas ideas, perderían esa apariencia de muerte y de hechos disecados y volverían a tomar una vida fresca y pujante».*

Tal visión dinámica nos capacitaría para muchas tareas interesantes en nuestro trabajo educativo:

- posibilidad de extrapolación hacia el futuro;

- inmersión creativa en las dificultades del pasado;

- comprobación de lo tortuoso de los caminos de la invención, con la percepción de la ambigüedad, oscuridad, confusión iniciales, a media luz, esculpiendo torsos inconclusos...

Por otra parte, el conocimiento de la historia de la matemática y de la biografía de sus creadores más importantes nos hace plenamente conscientes del carácter profundamente histórico, es decir, dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales, prejuicios del momento, ... así como de los mutuos y fuertes impactos que la cultura en general, la filosofía, la matemática, la tecnología, las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras. Aspecto este último del que los mismos matemáticos enfrascados en su quehacer técnico no suelen ser muy conscientes, por la forma misma en que la matemática suele ser presentada, como si fuera inmune a los avatares de la historia.

Desgraciadamente, tanto para el estudiante que desea sumergirse en la investigación matemática como para el que quiere dedicarse a sus aplicaciones a la enseñanza, la historia de la matemática suele estar totalmente ausente de la formación universitaria en nuestro país. A mi parecer sería extraordinariamente conveniente que las diversas materias que enseñamos se beneficiaran de la visión histórica, como he dicho arriba, y que a todos nuestros estudiantes se les proporcionara siquiera un breve panorama global del desarrollo histórico de la ciencia que les va a ocupar toda su vida. Mientras llega una situación razonable yo me atrevería a aconsejar:

- la lectura atenta de algunos de los numerosos y excelentes tratados de historia que van apareciendo en castellano (Boyer, Kline, Colette, Grattan-Guinness...);

- acudir, para los temas del interés particular de cada uno, a las fuentes originales, especialmente de los clásicos;

- leer las biografías de los grandes matemáticos, al menos en la forma sucinta en que aparecen en el Dictionary of Scientific Biography.

4.3. Sobre la utilización de la historia en la educación matemática

El valor del conocimiento histórico no consiste en tener una batería de historietas y anécdotas curiosas para entretener a nuestros alumnos a fin de hacer un alto en el camino.

La historia se puede y se debe utilizar, por ejemplo, para entender y hacer comprender una idea difícil del modo más adecuado. Quien no tenga la más mínima idea de las vueltas y revueltas que el pensamiento matemático ha recorrido hasta dar, pongamos por caso, con la noción rigurosamente formalizada del número complejo, se sentirá tal vez justificado para introducir en su enseñanza los números complejos como «*el conjunto de los pares de números reales entre los cuales se establecen las siguientes operaciones...*».

Quien sepa que ni Euler ni Gauss, con ser quienes eran, llegaron a dar ese rigor a los números complejos y que a pesar de ello pudieron hacer cosas maravillosas relacionadas con ellos, se preguntará muy seriamente acerca de la conveniencia de tratar de introducir los complejos en la estructura cristalizada antinatural y difícil de tragar, que sólo después de varios siglos de trabajo llegaron a tener.

Los diferentes métodos del pensamiento matemático, tales como la inducción, el pensamiento algebraico, la geometría analítica, el cálculo infinitesimal, la topología la probabilidad,... han surgido en circunstancias históricas muy interesantes y muy peculiares, frecuentemente en la mente de pensadores muy singulares, cuyos méritos, no ya por justicia, sino por ejemplaridad, es muy útil resaltar.

La historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como:

- hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas;

- enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes;

- señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente;

- apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.

4.4. La heurística ("problem solving") en la enseñanza de la matemática

La enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo y de inculturación mencionado en el punto 4.1. Lo que en el fondo se persigue con ella es transmitir en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas.

Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra. Nuestros libros de texto están, por lo general, repletos de meros ejercicios y carentes de verdaderos problemas. La apariencia exterior puede ser engañosa. También en un ejercicio se expone una situación y se pide que se llegue a otra: Escribir el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(1 +x)^{32}$. Pero si esta actividad, que fue un verdadero problema para los algebristas del siglo XVI, se encuentra, como suele suceder, al final de una sección sobre el binomio de Newton, no constituye ya ningún reto notable. El alumno tiene los caminos bien marcados. Si no es capaz de resolver un problema semejante, ya sabe que lo que tiene que hacer es aprenderse la lección primero.

La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Se trata de considerar como lo más importante:

- que el alumno manipule los objetos matemáticos;

- que active su propia capacidad mental;

- que ejercite su creatividad;

- que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente;

- que, a ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental;

- que adquiera confianza en sí mismo;

- que se divierta con su propia actividad mental;

- que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana;

- que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

¿Cuáles son las ventajas de este tipo de enseñanza? ¿Por qué esforzarse para conseguir tales objetivos? He aquí unas cuantas razones interesantes:

- porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas;

- porque el mundo evoluciona muy rápidamente: los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos;

- porque el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo;

- porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas;

- porque es aplicable a todas las edades.

¿En qué consiste la novedad? ¿No se ha enseñado siempre a resolver problemas en nuestras clases de matemáticas? Posiblemente los buenos profesores de todos los tiempos han utilizado de forma espontánea los métodos que ahora se propugnan. Pero lo que tradicionalmente se ha venido haciendo por una buena parte de nuestros profesores se puede resumir en las siguientes fases: exposición de contenidos - ejemplos - ejercicios sencillos - ejercicios más complicados - ¿problemas?

La forma de presentación de un tema matemático basada en el espíritu de la resolución de problemas debería proceder más o menos del siguiente modo: Propuesta de la situación problema de la que surge el tema (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos...)

- manipulación autónoma por los estudiantes
- familiarización con la situación y sus dificultades
- elaboración de estrategias posibles
- ensayos diversos por los estudiantes
- herramientas elaboradas a lo largo de la historia (contenidos motivados)
- elección de estrategias
- ataque y resolución de los problemas
- recorrido crítico (reflexión sobre el proceso)
- afianzamiento formalizado (si conviene)
- generalización
- nuevos problemas
- posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas...

En todo el proceso el eje principal ha de ser la propia actividad dirigida con tino por el profesor, colocando al alumno en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con tanto esfuerzo. Las ventajas del procedimiento bien llevado son claras: actividad contra pasividad, motivación contra aburrimiento, adquisición de procesos válidos contra rígidas rutinas inmotivadas que se pierden en el olvido....

En mi opinión el método de enseñanza por resolución de problemas presenta algunas dificultades que no parecen aún satisfactoriamente resueltas en la mente de algunos profesores y mucho menos en la forma práctica de llevarlo a cabo. Se trata de armonizar adecuadamente las dos componentes que lo integran, la componente heurística, es decir, la atención a los procesos de pensamiento, y los contenidos específicos del pensamiento matemático.

A mi parecer existe en la literatura actual una buena cantidad de obras excelentes cuya atención primordial se centra en los aspectos heurísticos, puestos en práctica sobre contextos diversos, unos más puramente lúdicos, otros con sabor más matemático. Algunas de estas obras cumplen a la perfección, en mi opinión, su cometido de transmitir el espíritu propio de la actitud de resolución de problemas y de confirmar en quien se adentra en ellas las actitudes adecuadas para la ocupación con este tipo de actividad. Sin embargo, creo que aún no han surgido intentos serios y sostenidos por producir obras que efectivamente apliquen el espíritu de la resolución de problemas a la transmisión de aquellos contenidos de la matemática de los diversos niveles que en la actualidad pensamos que deben estar presentes en nuestra educación.

Lo que suele suceder a aquellos profesores genuinamente convencidos de la bondad de los objetivos relativos a la transmisión de los procesos de pensamiento es que viven una especie de esquizofrenia, tal vez por falta de modelos adecuados, entre los dos polos alrededor de los que gira su enseñanza, los contenidos y los procesos.

Los viernes ponen el énfasis en los procesos de pensamiento, alrededor de situaciones que nada tienen que ver con los programas de su materia, y los demás días de la semana se dedican con sus alumnos a machacar bien los contenidos que hay que cubrir, sin acordarse para nada de lo que el viernes pasado practicaron. Sería muy necesario que surgieran modelos, aunque fueran parciales, que integraran en un todo armonioso ambos aspectos de nuestra educación matemática.

De todos modos, probablemente se puede afirmar que quien está plenamente imbuido en ese espíritu de la resolución de problemas se enfrentará de una manera mucho más adecuada a la tarea de transmitir competentemente los contenidos de su programa. Por ello, considero importante trazar, aunque sea someramente, las líneas de trabajo que se pueden seguir a fin de conseguir una eficaz preparación en el tema.

4.5. Sobre la preparación necesaria para la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas

La preparación para este tipo de enseñanza requiere una inmersión personal, seria y profunda. No se trata meramente de saber unos cuantos trucos superficiales, sino de adquirir unas nuevas actitudes que calen y se vivan profundamente.

A mi parecer, esta tarea se realiza más efectivamente mediante la formación de pequeños grupos de trabajo. El trabajo en grupo en este tema tiene una serie de ventajas importantes:

- proporciona la posibilidad de un gran enriquecimiento, al permitirnos percibir las distintas formas de afrontar una misma situación-problema;

- se puede aplicar el método desde diferentes perspectivas, unas veces en el papel de moderador del grupo, otras en el de observador de su dinámica;

- el grupo proporciona apoyo y estímulo en una labor que de otra manera puede resultar dura, por su complejidad y por la constancia que requiere;

- el trabajo con otros nos da la posibilidad de contrastar los progresos que el método es capaz de producir en uno mismo y en otros;

- el trabajo en grupo proporciona la posibilidad de prepararse mejor para ayudar a nuestros estudiantes en una labor semejante con mayor conocimiento de los resortes que funcionan en diferentes circunstancias y personas.

Algunos de los aspectos que es preciso atender en la práctica inicial adecuada son los siguientes:

- exploración de los diferentes bloqueos que actúan en cada uno de nosotros, a fin de conseguir una actitud sana y agradable frente a la tarea de resolución de problemas;

- práctica de los diferentes métodos y técnicas concretas de desbloqueo;

- exploración de las aptitudes y defectos propios más característicos, con la elaboración de una especie de autorretrato heurístico;

- ejercicio de diferentes métodos y alternativas;

- práctica sostenida de resolución de problemas con la elaboración de sus protocolos y su análisis en profundidad.

4.6. Diseño de una reunión de trabajo en grupo

Me parece que puede resultar útil en este punto sugerir un posible diseño para una reunión de trabajo en grupo según un esquema que yo mismo he practicado en diferentes ocasiones con provecho razonable.

Un equipo de trabajo puede constar de cinco o seis personas. Se podrían reunir una vez por semana durante un buen periodo, como de un año. Una sesión típica puede durar una hora y media. La sesión tiene dos partes bien diferenciadas, siendo la segunda la verdaderamente importante. La primera parte tiene por objeto ir ampliando el panorama de conocimientos teórico-prácticos del grupo.

Primera parte (media hora). Uno de los miembros del equipo ha preparado, mediante lecturas adecuadas, un tema bien concreto de naturaleza teórico-práctica, que podría consistir, por ejemplo, en el estudio de los bloqueos mentales de naturaleza afectiva. Lo expone en 20 minutos y se establece un periodo de discusión, comentarios, preguntas, aclaraciones, de 10 minutos.

Segunda parte (una hora). Una de las personas del grupo va a actuar en esta segunda parte como secretario, observador y seleccionador de problemas. Otra de ellas actuará como moderador. Los papeles de los componentes del grupo serán desempeñados por turno en diferentes reuniones.

El secretario para esta reunión ha elegido con anterioridad unos cuatro o cinco problemas que propone al resto. Es conveniente que sean verdaderos problemas, pero que al mismo tiempo no excedan la capacidad del grupo de resolverlos en un tiempo sensato. Es conveniente que el mismo secretario se haya familiarizado con las formas de resolver los problemas, pues aunque durante el proceso tendrá que actuar meramente como observador, al final deberá él mismo iluminar y complementar los resultados alcanzados por el grupo.

Hay que recalcar que la finalidad principal de la actividad que el grupo va a realizar puede quedar perfectamente cumplida aunque los problemas no se resuelvan. Es muy conveniente, sin embargo, desde el punto de vista de la motivación, que los problemas elegidos, por una parte, constituyan un verdadero reto, pero que al mismo tiempo sean susceptibles de solución por el grupo.

La misión del secretario-observador, aparte de la elección de los problemas, consiste en observar e ir anotando los puntos más importantes del camino que sigue el resto del grupo en busca de la solución del problema. El es el encargado de realizar el protocolo del proceso y sus observaciones y notas han de ayudar muy sustancialmente para la reflexión final que ha de seguir a esta etapa de trabajo. En general, permanecerá en silencio, cosa nada fácil de llevar a cabo, pero parece conveniente que intervenga en alguna ocasión, si es necesario, por ejemplo, para preguntar sobre el origen de una nueva idea de algún componente del grupo, que probablemente se alejaría de su memoria si se espera al período de reflexión al final del proceso.

Como antes ha quedado dicho, de los otros cuatro o cinco componentes del grupo uno actúa como moderador para esta reunión de trabajo. Los papeles de ponente, secretario y moderador van rotando en cada sesión. La forma de proceder del grupo hacia la resolución del problema puede ser muy variada y sería conveniente experimentar diferentes esquemas para que cada grupo elija el que mejor se le adapta.

Lo verdaderamente importante es que se cree una atmósfera en el grupo libre de inhibiciones, libre de competitividad, en que cada uno esté deseoso de aportar sin imponer, abierto a aceptar incluso lo que a primera vista pueda parecer más estrafalario, colaborando gustosamente para mejorar las ideas iniciadas por los otros y viendo con gusto cómo los otros van perfeccionando las ideas propuestas por él. La tarea esencial del moderador es precisamente mantener permanentemente este clima, estimulando, si hace falta, la aportación del que tiende a callar demasiado e inhibiendo con suavidad la del que tiende a hablar en exceso, animando cuando el grupo parece quedarse pegado, tratando de abrir nuevas vías cuando todo parece cerrado...

El esquema concreto de trabajo puede tener lugar según estas cuatro fases que pueden servir como marco muy general:

- El grupo se familiariza con el problema.

- En busca de estrategias posibles.

- El grupo selecciona y lleva adelante las estrategias que parecen más adecuadas.

- El grupo reflexiona sobre el proceso que ha seguido.

En la bibliografía al final de estas notas se pueden encontrar varios lugares en los que he tratado de proporcionar una descripción más detallada de esta forma de proceder.

4.7. Modelización y aplicaciones en la educación matemática

Existe en la actualidad una fuerte corriente en educación matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de las matemáticas no se realice explorando las construcciones matemáticas en si mismas, en las diferentes formas en que han cristalizado a lo largo de los siglos, sino en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y les siguen dando su motivación y vitalidad.

Tal corriente está en plena consonancia con las ideas antes desarrolladas y parece como un corolario natural de ellas. La matemática, como hemos visto, se origina como un intento por explorar, en su peculiar modo, las diferentes estructuras complejas que se prestan a ello. La creación del matemático se realiza espontáneamente en este intento por dominar aspectos matematizables de la realidad. La educación matemática debería tener por finalidad principal la inculturación, tratando de incorporar en ese espíritu matemático a los más jóvenes de nuestra sociedad.

Parece obvio gue si nos limitáramos en nuestra educación a una mera presentación de los resultados que constituyen el edificio puramente teórico que se ha desarrollado en tal intento, dejando a un lado sus orígenes en los problemas que la realidad presenta y sus aplicaciones para resolver tales problemas, estaríamos ocultando una parte muy interesante y sustancial de lo que la matemática verdaderamente es. Aparte de que estaríamos con ello prescindiendo del gran poder motivador que la modelización y las aplicaciones poseen.

4.8. El papel del juego en la educación matemática

La actividad matemática ha tenido desde siempre una componente lúdica que ha sido la que ha dado lugar a una buena parte de las creaciones más interesantes que en ella han surgido.

El juego, tal como el historiador J. Huizinga lo analiza en su obra *Homo ludens*, presenta unas cuantas características peculiares:

- es una actividad libre, en el sentido de la *paideia* griega, es decir, una actividad que se ejercita por sí misma, no por el provecho que de ella se pueda derivar;

- tiene una cierta función en el desarrollo del hombre; el cachorro humano, como el animal, juega y se prepara con ello para la vida; también el hombre adulto juega y al hacerlo experimenta un sentido de liberación, de evasión, de relajación;

- el juego no es broma; el peor revientajuegos es el que no se toma en serio su juego;

- el juego, como la obra de arte, produce placer a través de su contemplación y de su ejecución;

- el juego se ejercita separado de la vida ordinaria en el tiempo y en el espacio;

- existen ciertos elementos de tensión en él, cuya liberación y catarsis causan gran placer;

- el juego da origen a lazos especiales entre quienes lo practican;

- a través de sus reglas el juego crea un nuevo orden, una nueva vida, llena de ritmo y armonía.

Un breve análisis de lo que representa la actividad matemática basta para permitirnos comprobar que muchos de estos rasgos están bien presentes en ella. La matemática, por su naturaleza misma, es también juego, si bien este juego implica otros aspectos, como el científico, instrumental, filosófico, que juntos hacen de la actividad matemática uno de los verdaderos ejes de nuestra cultura.

Si el juego y la matemática, en su propia naturaleza, tienen tantos rasgos comunes, no es menos cierto que también participan de las mismas características en lo que respecta a su propia práctica. Esto es especialmente interesante cuando nos preguntamos por los métodos más adecuados para transmitir a nuestros alumnos el profundo interés y el entusiasmo que las matemáticas pueden generar y para proporcionar una primera familiarización con los procesos usuales de la actividad matemática.

Un juego comienza con la introducción de una serie de reglas, un cierto número de objetos o piezas, cuya función en el juego viene definida por tales reglas, exactamente de la misma forma en que se puede proceder en el establecimiento de una teoría matemática por definición implícita: «Se nos dan tres sistemas de objetos. Los del primer sistema los llamaremos puntos, los del segundo rectas...» (Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*).

Quien se introduce en la práctica de un juego debe adquirir una cierta familiarización con sus reglas, relacionando unas piezas con otras al modo como el novicio en matemáticas compara y hace interactuar los primeros elementos de la teoría unos con otros. Estos son los ejercicios elementales de un juego o de una teoría matemática.

Quien desea avanzar en el dominio del juego va adquiriendo unas pocas técnicas simples que, en circunstancias que aparecen repetidas a menudo, conducen al éxito. Estos son los hechos y lemas básicos de la teoría que se hacen fácilmente accesibles en una primera familiarización con los problemas sencillos del campo.

Una exploración más profunda de un juego con una larga historia proporciona el conocimiento de los caminos peculiares de proceder de los que han sido los grandes maestros en el campo. Estas son las estrategias de un nivel más profundo y complejo que han requerido una intuición especial, puesto que se encuentran a veces bien alejadas de los elementos iniciales del juego. Esto corresponde en matemáticas a la fase en la que el estudiante trata de asimilar y hacer profundamente suyos los grandes teoremas y métodos que han sido creados a través de la historia. Son los procesos de las mentes más creativas que están ahora a su disposición para que él haga uso de ellas en las situaciones más confusas y delicadas.

Más tarde, en los juegos más sofisticados, donde la reserva de problemas nunca se agota, el jugador experto trata de resolver de forma original situaciones del juego que nunca antes han sido exploradas. Esto corresponde al enfrentamiento en matemáticas con los problemas abiertos de la teoría.

Finalmente, hay unos pocos que son capaces de crear nuevos juegos, ricos en ideas interesantes y en situaciones capaces de motivar estrategias y formas innovadoras de jugar. Esto es paralelo a la creación de nuevas teorías matemáticas, fértiles en ideas y problemas, posiblemente con aplicaciones para resolver otros problemas abiertos en matemáticas y para revelar niveles de la realidad más profundos que hasta ahora habían permanecido en la penumbra.

La matemática y los juegos han entreverado sus caminos muy frecuentemente a lo largo de los siglos. Es frecuente en la historia de las matemáticas la aparición de una observación ingeniosa, hecha de forma lúdica, que ha conducido a nuevas formas de pensamiento. En la antigüedad se puede citar el *I Ching* como origen del pensamiento combinatorio, y de tiempos más modernos se puede citar en este contexto a Fibonacci, Cardano, Fermat, Pascal, Leibniz, Euler, Daniel Bernoulli...

Del valor de los juegos para despertar el interés de los estudiantes se ha expresado muy certeramente Martin Gardner, el gran experto de nuestro tiempo en la presentación lúcida, interesante y profunda de multitud de juegos por muchos años en sus columnas de la revista americana *Scientific American*: "Con seguridad el mejor camino para despertar a un estudiante consiste en ofrecerle un intrigante juego, puzzle, truco de mata, chiste, paradoja, pareado de naturaleza matemática o cualquiera de entre una veintena de cosas que los profesores aburridos tienden a evitar porque parecen frívolas" (*Carnaval Matemático*, Prólogo).

El matemático experto comienza su aproximación a cualquier cuestión de su campo con el mismo espíritu explorador con el que un niño comienza a investigar un juguete recién estrenado, abierto a la sorpresa, con profunda curiosidad ante el misterio que poco a poco espera iluminar, con el placentero esfuerzo del descubrimiento. ¿Por qué no usar este mismo espíritu en nuestra aproximación pedagógica a las matemáticas?

A mi parecer, el gran beneficio de este acercamiento lúdico consiste en su potencia para transmitir al estudiante la forma correcta de colocarse en su enfrentamiento con problemas matemáticos.

La matemática es un grande y sofisticado juego que, además, resulta ser al mismo tiempo una obra de arte intelectual, que proporciona una intensa luz en la exploración del universo y tiene grandes repercusiones prácticas. En su aprendizaje se puede utilizar con gran provecho, como hemos visto anteriormente, sus aplicaciones, su historia, las biografías de los matemáticos más interesantes, sus relaciones con la filosofía o con otros aspectos de la mente humana, pero posiblemente ningún otro camino puede transmitir cuál es el espíritu correcto para hacer matemáticas como un juego bien escogido.

4.9. Importancia actual de la motivación y presentación

Nuestros alumnos se encuentran intensamente bombardeados por técnicas de comunicación muy poderosas y atrayentes. Es una fuerte competencia con la que nos enfrentamos en la enseñanza cuando tratamos de captar una parte sustancial de su atención. Es necesario que lo tengamos en cuenta constantemente y que nuestro sistema educativo trate de aprovechar a fondo tales herramientas como el vídeo, la televisión, la radio, el periódico, el cómic, la viñeta, la participación directa...

Pienso que estamos aun muy lejos de saber aprovechar para nuestra enseñanza las posibilidades abiertas a través de los medios técnicos de los que ya disponemos actualmente. Una pequeña sugerencia práctica puede servir de ejemplo. En nuestro entorno tenemos profesores excelentemente preparados para servir de ejemplos sobre cómo realizar con eficacia la enseñanza de diversas materias que resultan para la mayoría un verdadero rompecabezas, por ejemplo, la probabilidad, o sobre cómo introducir y motivar adecuadamente temas específicos del cálculo o de la geometría a diferentes niveles. Estos profesores se encuentran a menudo llamados a muchos lugares diferentes para que repitan las mismas ideas sobre el tema. ¿No sería mucho más efectivo y menos costoso que algún organismo que no tuviera que ir en busca del provecho económico produjera una serie de vídeos con estas experiencias y las hiciera asequibles a un mayor número de personas?

En algunas regiones de nuestro país, los profesores de los diferentes niveles se han percatado de la importancia que puede tener un cambio efectivo que se puede realizar paulatinamente en la sociedad a través de los medios de comunicación actuales en la percepción de lo que la matemática es en realidad. Las experiencias son altamente satisfactorias, consiguiéndose en muchos casos a través de interesantes problemas, mediante la difusión de parcelas de la historia de la matemática o de sus aplicaciones, la involucración de familias y poblaciones enteras en actividades que en principio tal vez fueron planeadas para los estudiantes.

4.10. Fomento del gusto por la matemática

La actividad física es un placer para una persona sana. La actividad intelectual también lo es. La matemática orientada como saber hacer autónomo, bajo una guía adecuada, es un ejercicio atrayente. De hecho, una gran parte de los niños más jóvenes pueden ser introducidos de forma agradable en actividades y manipulaciones que constituyen el inicio razonable de un conocimiento matemático. Lo que suele suceder es que un poco más adelante nuestro sistema no ha sabido mantener este interés y ahoga en abstracciones inmotivadas y a destiempo el desarrollo matemático del niño. El gusto por el descubrimiento en matemáticas es posible y fuertemente motivador para superar otros aspectos rutinarios necesarios de su aprendizaje, por los que por supuesto hay que pasar. La apreciación de las posibles aplicaciones del pensamiento matemático en las ciencias y en las tecnologías actuales puede llenar de asombro y placer a muchas personas más orientadas hacia la práctica. Otros se sentirán más movidos ante la contemplación de los impactos que la matemática ha ejercido sobre la historia y filosofía del hombre, o ante la biografía de tal o cual matemático famoso.

Es necesario romper, con todos los medios, la idea preconcebida, y fuertemente arraigada en nuestra sociedad, proveniente con probabilidad de bloqueos iniciales en la niñez de muchos, de que la matemática es necesariamente aburrida, abstrusa, inútil, inhumana y muy difícil.

5. Algunas tendencias actuales en los contenidos

Las mismas tendencias generales apuntadas en]a sección 3 sugieren de forma natural unas cuantas reformas en los contenidos de los programas que, con más o menos empuje, y en algunos casos de forma experimental y tentativo, se van introduciendo.

5.1. ¿Un desplazamiento hacia la matemática discreta?

La matemática del siglo XIX y la del XX ha sido predominantemente la matemática del continuo en la que el análisis, por su potencia y repercusión en las aplicaciones técnicas, ha jugado un papel predominante.

El advenimiento de los ordenadores, con su inmensa capacidad de cálculo, con su enorme rapidez, versatilidad, potencia de representación gráfica, posibilidades para la modelización sin pasar por la formulación matemática de corte clásico... ha abierto multitud de campos diversos, con origen no ya en la física, como los desarrollos de siglos anteriores, sino en otras muchas ciencias, tales como la economía, las ciencias de la organización, biología... cuyos problemas resultaban opacos, en parte por las enormes masas de información que había que tratar hasta llegar a dar con las intuiciones matemáticas valiosas que pudieran conducir a procesos de resolución de los difíciles problemas propuestos en estos campos.

Por otra parte, el acento en los algoritmos discretos, usados en las ciencias de la computación, en la informática, así como en la modelización de diversos fenómenos mediante el ordenador, ha dado lugar a un traslado de énfasis en la matemática actual hacia la matemática discreta. Ciertas porciones de ella son suficientemente elementales como para poder formar parte con éxito de un programa inicial de matemática. La combinatoria clásica, así como los aspectos modernos de ella, tales como la teoría de grafos o la geometría combinatoria, podrían ser considerados como candidatos adecuados. La teoría elemental de números, que nunca llegó a desaparecer de los programas en algunos países, podría ser otro.

Se han realizado intentos por introducir estos elementos y otros semejantes pertenecientes a la matemática discreta en la enseñanza matemática inicial. Sucede que esto parece ser sólo posible a expensas de otras porciones de la matemática con más raigambre, de las que no se ve bien cómo se puede prescindir. Aunque parece bastante obvio que el sabor de la matemática del futuro será bastante diferente del actual por razón de la presencia del ordenador, aún no se ve bien claro cómo esto va a plasmarse en los contenidos de la enseñanza primaria y secundaria.

5.2. Impactos en los contenidos de los métodos modernos de cálculo

Hasta hace no mucho tiempo era frecuente en nuestras escuelas elementales dedicar una gran energía y largo tiempo a rutinas tales como la división de un número de seis cifras por otro de cuatro. O a la extracción a mano de la raíz cuadrada de un número de seis cifras con tres cifras decimales exactas. O, en cursos superiores, al manejo con destreza y rapidez de las tablas de logaritmos con su intrincado laberinto de interpolaciones. Hoy la presencia de la calculadora de bolsillo ha conseguido que casi todos estemos de acuerdo en que esa energía y ese tiempo están mejor empleados en otros menesteres. Tales operaciones son muy interesantes como algoritmos inteligentes y profundos pero como destrezas rutinarias son superfluos.

En la actualidad, año 1991, en nuestra segunda enseñanza, así como en los primeros años de nuestra enseñanza universitaria, dedicamos gran energía y largo tiempo a fin de que nuestros alumnos adquieran destreza y agilidad en el cálculo de derivadas, antiderivadas, resolución de sistemas lineales, multiplicación de matrices, representación gráfica de funciones, cálculo de la desviación típica...

Ya desde hace unos años existen en el mercado calculadoras de bolsillo que son capaces, sin más que apretar unas pocas teclas, en unos breves segundos, de hallar la derivada de $(l+(1/x))^{1/x}$, de dar su polinomio de Taylor hasta el término de tercer grado, de representar gráficamente esta función en un cierto entorno que se pida o bien de hallar el valor de su integral entre 2 y 3 con gran aproximación. La inversión de una matriz 8x8 le ocupa a la máquina unos pocos segundos, una porción mínima del tiempo que se tarda en darle los datos. El cálculo de la desviación típica de una gran masa de datos es una operación inmediata. Las soluciones de una ecuación de séptimo grado, incluidas las raíces complejas, son proporcionadas por la máquina en un abrir y cerrar de ojos.

Siendo así las cosas, es claro que nuestra enseñanza del cálculo, del álgebra, de la probabilidad y estadística, ha de transcurrir en el futuro por otros senderos distintos de los que hoy seguimos. Habrá que poner el acento en la comprensión e interpretación de lo que se está haciendo, pero será superflua la energía dedicada a adquirir agilidad en las rutinas que la máquina realiza con mucha mayor rapidez y seguridad. En la programación de nuestra enseñanza habremos de preguntarnos constantemente dónde vale la pena que apliquemos nuestro esfuerzo inteligente y cuáles son las rutinas que podemos confiar a nuestras máquinas. El progreso de la inteligencia humana consiste en ir convirtiendo en rutinarias aquellas operaciones que en un principio han representado un verdadero desafío para nuestra mente y, si es posible, entregar la realización de tales rutinas a nuestras máquinas. Con ello podemos liberar lo mejor de nuestra capacidad mental a la resolución de los problemas que todavía son demasiado profundos para las herramientas de que disponemos. No temamos que tales problemas vayan escaseando.

La experimentación en matemáticas, que se hace posible en campos cada vez más intrincados gracias a la presencia del ordenador y de la calculadora de bolsillo, es otro de los retos para el futuro de nuestra enseñanza. ¿Converge la sucesión a_n $(n^{1/n} - (n + 1)^{1/(1+n)})$?

Con la calculadora he escrito la fórmula que proporciona a y luego le he pedido que calcule unos cuantos valores significativos. Responde:

$$a_{100} = 0{,}037421803;\ a_{1.000} = 0{,}00594325;\ a_{10.000} = 0{,}0008217,...$$

Este experimento me da confianza para conjeturar que converge a 0, aunque lentamente, y es bien sabido lo mucho que una conjetura correcta facilita la solución de un problema. Por otra parte la calculadora me proporciona la gráfica de la función:

$$y= x\,(x^{1/x} - (x + 1)^{1/(x+1)})$$

que viene a reforzar nuestra conjetura.

Por otra parte la capacidad para el cálculo infinitesimal, el álgebra, la estadística, la representación gráfica, la modelización,... de esta calculadora que realiza cálculo simbólico, además del numérico, y por supuesto mucho más la de los ordenadores actuales, potencian claramente las posibilidades de la matemática elemental para las aplicaciones realistas que hasta ahora estaban vedadas en nuestros cursos por el exceso de tedioso cálculo simbólico y numérico que habría que efectuar a mano.

5.3. Hacia una recuperación del pensamiento geométrico y de la intuición espacial

Como reacción a un abandono injustificado de la geometría intuitiva en nuestros programas, del que fue culpable la corriente hacia la «matemática moderna», hoy se considera una necesidad ineludible, desde un punto de vista didáctico, científico, histórico, volver a recuperar el contenido espacial e intuitivo en toda la matemática, no ya sólo en lo que se refiere a la geometría.

Es evidente que desde hace unos veinte años el pensamiento geométrico viene pasando por una profunda depresión en nuestra enseñanza matemática inicial, primaria y secundaria. Y al hablar del pensamiento geométrico no me refiero a la enseñanza de la geometría más o menos fundamentada en los Elementos de Euclides, sino a algo mucho más básico y profundo, que es el cultivo de aquellas porciones de la matemática que provienen de y tratan de estimular la capacidad del hombre para explorar racionalmente el espacio físico en que vive, la figura, la forma física.

Esta situación, que se hace patente sin más que ojear nuestros libros de texto y los programas de nuestra educación primaria y secundaria, no es exclusiva de nuestro entorno. En realidad, es un fenómeno universal que, a mi parecer, se debe en buena medida a la evolución misma de la matemática desde comienzos de siglo, más o menos.

La crisis de los fundamentos de principio de siglo empujó al matemático hacia el formalismo, hacia el énfasis sobre el rigor, a una cierta huida de la intuición en la construcción de su ciencia. Lo que fue bueno para la fundamentación fue considerado por muchos bueno también para la transmisión de conocimientos. Las consecuencias para la enseñanza de las matemáticas en general fueron malas, pero especialmente nefastas resultaron para el pensamiento geométrico. En esa idea de ir a los fundamentos, tal vez juntamente con una mala interpretación de los análisis de algunos psicopedagogos sobre la estructura evolutiva del conocimiento del niño, se basa el énfasis sobre la teoría de conjuntos y la búsqueda de rigor. La geometría, a nivel elemental, es difícil de formalizar adecuadamente y así, en este intento, se nos fue por el mismo agujero el pensamiento geométrico, la intuición espacial y la fuente más importante que por muchos siglos ha tenido la matemática de verdaderos problemas y resultados interesantes abordables con un número pequeño de herramientas fácilmente asimilables.

El siglo XIX fue el siglo de oro del desarrollo de la geometría elemental, del tipo de geometría al que tradicionalmente se dedicaba la enseñanza inicial de la matemática, que vivía a la sombra de creaciones muy interesantes y muy de moda de la matemática superior, tales como la geometría descriptiva, geometría proyectiva, geometría sintética, geometrías no euclídeas... El mismo sentido geométrico que estimuló los desarrollos espectaculares del siglo XIX sigue vivo también hoy en campos tales como la teoría de grafos, teoría de cuerpos convexos, geometría combinatoria, algunos capítulos de la teoría de optimización, de la topología... Como rasgos comunes a todos estos desarrollos se pueden señalar: una fuerte relación con la intuición espacial, una cierta componente lúdica y tal vez un rechazo tácito de desarrollos analíticos excesivos.

De estas materias, cuya profundidad se va manifestando cada vez más claramente, no se ha hecho eco en absoluto la enseñanza elemental. Solamente son tenidas en cuenta a nivel superior y a nivel de matemática recreativa. Pero esta matemática recreativa, en nuestro país, no ha encontrado aún el camino hacia la escuela. Paradójicamente, no permitimos jugar a quien más le gusta y a quien más se beneficiaria con el juego matemático.

La necesidad de una vuelta del espíritu geométrico a la enseñanza matemática es algo en lo que ya todo el mundo parece estar de acuerdo. Sin embargo, aún no es muy claro cómo se debe llevar a cabo. Es necesario evitar llegar a los extremos en que se incurrió, por ejemplo, con la geometría del triángulo, tan en boga a finales del siglo XIX. También hay que evitar una introducción rigurosamente sostenida de una geometría axiomática. Posiblemente una orientación sana podría consistir en el establecimiento de una base de operaciones a través de unos cuantos principios intuitivamente obvios sobre los que se podrían levantar desarrollos locales interesantes de la geometría métrica clásica, elegidos por su belleza y profundidad. Las obras elementales de Coxeter pueden ser tal vez un ejemplo a seguir en este terreno.

5.4. Auge del pensamiento aleatorio. Probabilidad y estadística

La probabilidad y la estadística son componentes muy importantes en nuestra cultura y en muchas de nuestras ciencias específicas. Deberían constituir una parte importante del bagaje cultural básico del ciudadano de nuestra sociedad. Es éste un punto en el que todos los sistemas educativos parecen concordar. Y, efectivamente, son muchos los países que incluyen en sus programas de enseñanza secundaria estas materias, pero en pocos esta enseñanza se lleva a cabo con la eficacia deseada. En España, este fenómeno, a mi parecer, se debe por una parte a la dificultad misma de las materias en cuestión y a una cierta carencia de preparación adecuada de los profesores para esta tarea. Tal vez nos falten buenos modelos de enseñanza de ellas.

6. Desiderata

A continuación quisiera presentar muy someramente unas pocas sugerencias sobre algunos proyectos a los que, en mi opinión, nuestra comunidad matemática podría y debería prestar una particular atención.

6.1. Atención a la formación inicial y permanente de los profesores de matemáticas

En 1908, Félix Klein escribía en la introducción de sus lecciones sobre *Matemática elemental desde un punto de vista superior*: «...durante mucho tiempo la gente de la universidad se preocupaba exclusivamente de sus ciencias, sin conceder atención alguna a las necesidades de las escuelas, sin cuidarse en absoluto de establecer conexión alguna con la matemática de la escuela. ¿Cuál era el resultado de esta práctica? El joven estudiante de la universidad se encontraba a sí mismo, al principio, enfrentado con problemas que no le recordaban en absoluto las cosas que le habían ocupado en la escuela. Naturalmente olvidaba estas cosas rápida y totalmente. Cuando, después de acabar su carrera, se convertía en profesor de enseñanza media se encontraba de repente en una situación en la que se suponía que debía enseñar las matemáticas elementales tradicionales en el viejo modo pedante; y puesto que, sin ayuda, apenas era capaz de percibir conexión alguna entre su tarea y sus matemáticas universitarias, pronto recurría a la forma de enseñanza garantizada por el tiempo y sus estudios universitarios quedaban solamente como una memoria más o menos placentera que no tenía influencia alguna sobre su enseñanza».

Ha pasado cerca de un siglo y, al menos en lo que respecta a la formación inicial que nuestros licenciados reciben no creo que se pueda decir que en nuestro entorno la situación difiere mucho de estas circunstancias indeseables que Klein describe.

Lo que la sociedad tiene derecho a esperar de la universidad en lo que respecta a la formación inicial de aquellas personas a las que les va a confiar la educación matemática de los más jóvenes se podría concretar en:

- una componente científica adecuada para su tarea específica;

- un conocimiento práctico de los medios adecuados de transmisión de las actitudes y saberes que la actividad matemática comporta;

- un conocimiento integrado de las repercusiones culturales del propio saber específico.

Cualquiera que estudie atentamente los programas de estudio de la mayor parte de nuestras universidades podrá apreciar sus importantes carencias en los aspectos que podrían conducir a esta formación adecuada de nuestros enseñantes.

A mi parecer, ni los cursos complementarios añadidos al final de los estudios de Licenciatura, con el objeto de proporcionar una formación pedagógica razonable ni los cursillos de formación permanente pueden sustituir razonablemente la formación intensa que se debería realmente estimular durante los años de permanencia en la universidad, años en los que el alumno está mucho más abierto para recibirla.

Pienso que son raras entre nosotros las universidades que no descuidan abiertamente esta seria obligación con respecto a la sociedad y que urge poner manos a la obra a fin de remediar esta situación rápidamente.

6.2. Atención a la investigación en educación matemática

Como hemos tenido ocasión de ver, la educación matemática es una actividad interdisciplinar extraordinariamente compleja, que ha de abarcar saberes relativos a las ciencias matemáticas y a otras ciencias básicas que hacen uso de ella, a la psicología, a las ciencias de la educación... Sólo en tiempos muy recientes se ha ido consolidando como un campo, con tareas de investigación propias, difíciles y de repercusiones profundas en su vertiente práctica. Se puede afirmar que en el sistema universitario un tanto inerte de nuestro país la educación matemática aún no ha llegado a encontrar una situación adecuada por muy diversos motivos, a pesar de que ya van formándose grupos de trabajo en los que se producen resultados importantes.

A mi parecer, es muy necesario, por lo que a la sociedad le va en ello, que se formen en nuestras universidades buenos equipos de investigación en educación matemática que ayuden a resolver los muchos problemas que se presentan en el camino para una enseñanza matemática más eficaz.

6.3. Atención a la educación matemática de la sociedad. Popularización de la matemática

La sociedad de España se encuentra, por tradición de siglos, con una cultura fuertemente escorada hacia sus componentes humanísticas. En España, cultura parece ser sinónimo de literatura, pintura, música, ... Muchas de nuestras personas ilustradas no tienen empacho alguno en confesar abiertamente su profunda ignorancia respecto de los elementos más básicos de la matemática y de la ciencia y hasta parecen jactarse de ello sin pesar ninguno. Las páginas de la mayor parte de nuestros periódicos aún no se han percatado de que las ciencias, y en particular las matemáticas, constituyen ya en nuestros días uno de los pilares básicos de la cultura humana. Es más, parece claro que, como afirma Whitehead, «si la civilización continúa avanzando, en los próximos dos mil años, la novedad predominante en el pensamiento humano será el señorío de la intelección matemática».

Sería muy deseable que todos los miembros de la comunidad matemática y científica nos esforzáramos muy intensamente por hacer patente ante la sociedad la presencia influyente de la matemática y de la ciencia en la cultura. Una sociedad con el conocimiento cabal de lo que la ciencia representa para su desarrollo se hará colectivamente más sensible ante los problemas que la educación de los más jóvenes en este sentido representa.

En la comunidad matemática internacional se viene prestando recientemente una gran atención a los medios convenientes para lograr abrir los ojos de amplios sectores de la sociedad hacia los beneficios de todos los órdenes que puede reportar una cultura que integre, del modo debido, ciencia y matemática.

6.4. Atención al talento precoz en matemáticas

Es seguro que en nuestras comunidades escolares existe un cierto número de estudiantes con una dotación intelectual para las matemáticas verdaderamente excepcional. Son talentos que pasarán a veces más o menos inadvertidos y más bien desatendidos por la imposibilidad de que los profesores dediquen la atención personal que se necesitaría. Son personas que, en un principio ilusionadas con la escuela, pasan a un estado de aburrimiento, frustración y desinterés que les conducirá probablemente al adocenamiento y a la apatía, tras un periodo escolar de posible gran sufrimiento.

Por otra parte, son talentos que podrían rendir frutos excepcionales para el bien común de nuestra sociedad, si no se malograran, mediante su aporte extraordinario al desarrollo cultural, científico y tecnológico del país. Constituye una gran responsabilidad social la indudable pérdida de talento que causa su desatención. En la actualidad ningún organismo, ni público ni privado, presta atención continuada a la tarea de detectar, estimular y orientar el talento extraordinario y precoz en matemáticas, así como tampoco en ninguna otra de las ciencias. Existe, y con mucha justificación, una atención, apoyo y cuidado especiales con respecto a la enseñanza del infradotado, pero pienso que apenas se ha prestado atención alguna a los problemas propios de los talentos precoces en nuestros países.

Se puede pensar con cierto fundamento que el talento precoz en matemáticas es más fácil de detectar y estimular que en otras ciencias. De hecho, existen desde hace mucho tiempo proyectos realizados con éxito en un buen número de países. Hay diversos caminos para encauzar el problema y entre ellos los hay que no son de un coste excesivo, especialmente si se tiene en cuenta el rendimiento a largo plazo de una actuación bien llevada. Es posible, a juzgar por el efecto que en países de nuestro ámbito cultural iberoamericano ha tenido la emergencia de unas pocas personalidades de extraordinario talento en el desarrollo matemático del país, que una acción sostenida de detección y estimulo del talento matemático precoz podría colocar nuestro país en tiempo razonable a una altura matemática y científica mucho más elevada.